

ZENTRALBLATT FÜR MATHEMATIK

15. Band. Heft 4 UND IHRE GRENZGEBIETE

S. 145—192

Grundlagenfragen, Philosophie, Logik.

Sarantopoulos, Spyridon: Un théorème se rattachant à la méthode par récurrence (induction complète). (*Athènes*, 2.—9. IX. 1934.) Actes Congr. Interbalkan. Math. 261—263 (1935).

Heyting, A.: Intuitionistische Mathematik. *Mathematica*, Leiden B 4, 72—83, 123—128 u. 129—136 (1935); B 5, 62—80 u. 105—112 (1936) [Holländisch].

Kempner, A. J.: Remarks on „unsolvable“ problems. *Amer. Math. Monthly* 43, 467—473 (1936).

Lewis, C. I.: Emch's calculus and strict implication. *J. Symbolic Logic* 1, 77—86 (1936).

Let S denote the system of strict implication, L the system of logical implication as developed by Emch (*J. Symbolic Logic* 1, 26—35 and 58; this Zbl. 14, 193 and 386). S is isomorphic to a subset L_0 of L , $\diamond, <, =$ of S corresponding to $O, \sim, =$ of L_0 . Thus to every interpretation of L corresponds a possible interpretation of S , which we obtain by assigning to \diamond in S the same interpretation which is assigned to O in L . It follows that L cannot attain the purpose it was invented for. It is noteworthy that L also contains a subset L_s which is identical in form with S . Thus two ways of interpreting L must be considered. 1. If we impose on L_s the usual interpretation of S , the meaning of O must be wider than that of \diamond ; presumably such an interpretation is impossible. 2. If L_0 is interpreted as S usually is, we may assign to $\diamond p$ in L a narrower meaning than to $\diamond p$ in S (or $O p$ in L), e. g. „ p is compatible with all known facts“, and thus obtain a consistent interpretation of L . A. Heyting (Enschede).

Curry, H. B.: A note on the associative law in logical algebras. *Bull. Amer. Math. Soc.* 42, 523—524 (1936).

Für die von Bernays (*Math. Z.* 25) bewiesene Abhängigkeit des assoziativen Gesetzes der Konjunktion im aussagenlogischen Axiomensystem der Principia Mathematica wird ein anderer Beweis angegeben, der nach Angabe des Verf. eine Verfeinerung eines Peirce-Schröderschen Beweises darstellt und der engste Satzgebiete ausschließt, in denen die Abhängigkeit gilt. Solche sind die beiden Axiomensysteme, die aus $p < pp$, $pq < q$, $pq < qp$, dem Schema „mit $p < q$ und $q < r$ ist $p < r$ “ und einem der beiden — auf dieser Basis äquivalenten — Schematen „mit $p < q$ ist $rp < rq$ “, „mit $p < q$ und $p < r$ ist $p < qr$ “ bestehen. Arnold Schmidt.

McKinsey, J. C. C.: Boolean functions and points. *Duke math. J.* 2, 465—471 (1936).

This paper is a contribution to Boolean Algebra (i. e., essentially, algebra of the type developed in Schröder's Vorlesungen über die Algebra der Logik). The problem is to determine when there exists in such an algebra a function $f(x_1, \dots, x_n)$ such that the r equations

$$f(a_{i1}, a_{i2} \dots a_{in}) = b_i \quad i = 1, 2, \dots, r$$

are satisfied for given $a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{in}, b_i$; also under what circumstances such a function f is uniquely determined. The author finds necessary and sufficient conditions for both of these occurrences. He shows further that a function f always exists when $r = 1$, and also for $r > 1$ if the Boolean algebra is a two-element algebra and the r n -ads (a_{i1}, \dots, a_{in}) are all distinct; otherwise such an f may or may not exist. Likewise he shows that for f to be uniquely determined it is necessary, but not sufficient for r to be $\geq 2^n$. (The author calls an ordered set of $n + 1$ Boolean elements an n space Boolean point; this terminology, though convenient for his proofs and suggesting his title, is not necessary for the statement of his results.) H. B. Curry.

Tang, Tsao-Chen: The theorem „ $p \prec q. = .pq = p$ “ and Huntington's relation between Lewis's strict implication and Boolean algebra. Bull. Amer. Math. Soc. 42, 743—746 (1936).

Huntington (s. dies. Zbl. 10, 49) hat bewiesen, daß in dem System (S2) des Aussagenkalküls der „strict implication“ von C. I. Lewis (s. Lewis and Langford: Symbolic Logic. New York: The Century Co. 1932) eine „strikte“ Implikation zwischen Ausdrücken α und β dann und nur dann gilt, wenn die Formel $\alpha = \alpha\beta$ gilt. Mit Hilfe analoger Beweisführung erhält nun der Verf. das folgende Theorem des Kalküls

$$p \prec q. = .pq = p,$$

woraus natürlich die Behauptung von Huntington folgt. — Der Ref. darf bemerken, daß in Beweisen des Verf. eine nicht einwandfreie Definition von 0 benutzt wird, was aber leicht verbessert werden kann; insb. ist der Beweis des Hilfssatzes 5 zu verändern.

A. Lindenbaum (Warszawa).

Tang, Tsao-Chen: A paradox of Lewis's strict implication. Bull. Amer. Math. Soc. 42, 707—709 (1936).

Wie die vorst. besprochene, betrifft auch diese Arbeit den Aussagenkalkül von Lewis. Eine „paradoxe“ Eigenschaft dieses Kalküls wird hervorgehoben: Sind nämlich „ $\alpha_1 \prec \beta_1$ “ und „ $\alpha_2 \prec \beta_2$ “ zwei beliebige „strikte“ Implikationen, die im System gelten, so gilt auch „ $\alpha_1 \prec \beta_1. \prec .\alpha_2 \prec \beta_2$ “. Dieses Resultat könnte sogar ohne weiteres verschärft werden (was vom Verf. unbemerkt bleibt), da die Voraussetzung, „ $\alpha_1 \prec \beta_1$ “ sei eine gültige Formel, überflüssig ist. Der Verf. formuliert noch einen speziellen Fall des „Paradoxes“ folgendermaßen: Da nach Lewis (lib. cit., S. 122) der Ausdruck „ α strictly implies β “ gleichbedeutend mit „ β is deducible from α “ sein soll, so sind zwei beliebige Axiome des betrachteten Kalküls auseinander „deducible“! (Das vom Verf. erwähnte Axiom 20.01 muß aber ausgeschlossen werden.) — Anm. des Ref.: Im zitierten Buche (S. 122) kritisiert Lewis den gewöhnlichen Implikationsbegriff, welcher „to . . . paradoxes such as . . . „A true proposition is implied by any““ führt. Aus der ref. Arbeit folgt aber für die „strict implication“ eine analoge Eigenschaft, die doch Lewis wahrscheinlich verteidigen würde (vgl. lib. cit., S. 174, 248 bis 255, und dazu dies. Zbl. 14, 1, Bronstein).

A. Lindenbaum (Warszawa).

Birkhoff, Garrett, and John von Neumann: The logic of quantum mechanics. Ann. of Math., II. s. 37, 823—843 (1936).

„Experimentelle Aussagen“ über den Zustand eines quantenmechanischen Systems haben die Form: n gegebene gleichzeitig meßbare Größen haben Werte, die mit Sicherheit einer gegebenen Menge S von Wertsystemen angehören. Im Hilbertschen Raum der Zustandsfunktionen ψ entspricht jeder exp. Aussage ein abgeschl. lin. Unterraum. Die Aussage a trifft zu, wenn ψ dem Unterraum angehört; die entgegengesetzte Aussage a' („non a “) trifft zu, wenn ψ dem orthogonalen Komplement des Unterraums angehört. Es wird postuliert, daß dem Durchschnitt zweier Unterräume, die zu exp. Aussagen a und b gehören, auch eine exp. Aussage entspricht. Die Relation $a \subset b$ („aus a folgt b “) besteht dann, wenn der zu a gehörige Unterraum in dem zu b gehörigen enthalten ist. Die „quantenmechanische Logik“ ist nun die Axiomatik der Relationen $a \subset b$ und a' . Die Axiome sind den folgenden gleichwertig:

A 1. Aus $a \subset b$ und $b \subset c$ folgt $a \subset c$.

A 2. Aus $a \subset b$ folgt $b' \subset a'$.

A 3. $a \subset (a')'$ und $(a')' \subset a$.

A 4. Es gibt zu x und y eine Aussage $x \cap y$, so daß $(x \cap y) \subset x$, $(x \cap y) \subset y$ und aus $z \subset x$ und $z \subset y$ folgt $z \subset (x \cap y)$.

A 5. $a \cap a' \subset x$. Oder: Aus $a \subset a'$ folgt $a \subset x$.

Def.: $a = b$ bedeutet $a \subset b$ und $b \subset a$. Aus A 5 folgt: Es gibt eine Aussage o , so daß $o \subset x$ für alle x . Aus A 1 und A 3 folgt: $a \subset a$. Die Aussage o' hat die Eigenschaft $x \subset o'$ für alle x . Es gibt zu x und y eine Aussage $x \cup y = (x' \cap y')'$, so daß $x \subset (x \cup y)$,

$y \subset (x \cup y)$ und aus $x \subset z$ und $y \subset z$ folgt $x \cup y \subset z$. Demzufolge bilden die Aussagen einen Verband (a lattice; vgl. F. Klein, dies. Zbl. 3, 291; 9, 387; 12, 145; G. Birkhoff, dies. Zbl. 7, 395; 9, 55 u. 394; Ö. Ore, dies. Zbl. 12, 5). — In der klassischen Physik und in der Booleschen Logik gilt das distributive Gesetz:

$$L\ 6. \ a \cup (b \cap c) = (a \cup b) \cap (a \cup c).$$

In der Quantentheorie gilt L 6 nicht. Man kann aber aus der Dedekindschen Modultheorie das schwächere

$$A\ 6. \text{ Aus } a \subset c \text{ folgt } a \cup (b \cap c) = (a \cup b) \cap c$$

übernehmen. Im Hilbertschen Raum gilt A 6 allerdings nur dann, wenn die Modulsumme von zwei Teilräumen, denen Aussagen entsprechen, stets abgeschlossen ist. In einem endlichdimensionalen projektiven Raum gilt A 6 immer, ebenso in einer kontinuierlichdimensionalen proj. Geometrie (J. v. Neumann, dies. Zbl. 14, 223). A 6 folgt auch aus der Annahme einer numerischen Funktion $d(a)$ mit

$$D\ 1. \text{ Aus } a \subset b \text{ und } a \neq b \text{ folgt } d(a) < d(b).$$

$$D\ 2. \ d(a) + d(b) = d(a \cap b) + d(a \cup b).$$

Führt man eine Endlichkeitsbedingung für Ketten und eine Irreduzibilitätsbedingung ein, so folgt aus A 1 bis A 6, daß der Verband isomorph einer projektiven Geometrie über einen Schiefkörper ist, welcher einen inversen Isomorphismus W mit $W^2 = 1$ und eine definite Hermitesche Form

$$F = \sum_1^{n+1} x_v^W \gamma_v x_v$$

gestattet.

van der Waerden (Leipzig).

Geschichtliches.

Smith, David Eugene: Algebra of four thousand years ago. Scripta Math. 4, 111—125 (1936).

Archibald, R. C.: Babylonian mathematics. Isis 26, 63—81 (1936).

Bericht über die in den letzten Jahren gewonnenen Ergebnisse. O. Neugebauer.

● Neugebauer, O.: Mathematische Keilschrift-Texte. Tl. III. (Quellen und Studien z. Geschichte d. Math., Astron. u. Physik. Hrsg. v. O. Neugebauer und O. Toeplitz. Abt. A: Quellen. Bd. 3.) Berlin: Julius Springer 1937. VIII, 84 S., 1 Fig. u. 6 Taf. RM. 26.60.

Zu der in dies. Zbl. 12, 97 ref. Edition werden verschiedene Nachträge gegeben und mehrere neue Texte publiziert. Auch der schon von Thureau-Dangin publizierte Text des British Museum (vgl. dies. Zbl. 14, 388) wurde mit aufgenommen und seine Beziehungen zu den „Serientexten“ nachgewiesen, woraus folgt, daß diese wichtige Textklasse bereits bis in altbabylonische Zeit zurückreicht. Ein von Waschow bearbeiteter Text der Seleukidenzeit (hauptsächlich Rechtecksdiagonale und Kombinationen) zeigt auch allgemein formulierte Regeln. — In einem besonderen Kapitel wird ein kurzes Resümee über den gegenwärtigen Stand unserer Kenntnis der babylonischen Mathematik gegeben, auch auf Beziehungen zur griechischen Mathem. und Astronomie hingewiesen und Hypsikles' „Anaphorikos“ mit der babylonischen Mathematik in Beziehung gesetzt. — Ausführliche Register, insbesondere ein Sachregister für alle drei Teile, sind beigefügt.

O. Neugebauer (Kopenhagen).

Gandz, Solomon: Mene Mene Tekel Upharsin, a chapter in Babylonian mathematics. Isis 26, 82—94 (1936).

Verf. versucht eine Verbindung zwischen den im Titel genannten Worten und dem babylonischen Rechnen herzustellen.

O. Neugebauer (Kopenhagen).

Becker, Oskar: Die Lehre vom Geraden und Ungeraden im Neunten Buch der Euklidischen Elemente. (Versuch einer Wiederherstellung in der ursprünglichen Gestalt.) Quell. Stud. Gesch. Math. B 3, 533—553 (1936).

Die Sätze über gerade und ungerade Zahlen am Ende des 9. Buchs der Euklidischen Elemente (Satz 21—34) folgen trotz ihrer großen Einfachheit auf Sätze von viel höherem

Niveau. Verf. erblickt in ihnen ein Stück sehr alter griechischer Mathematik, das aus Pietätsgründen aufbewahrt sei, und versucht ihren ursprünglichen Zusammenhang mit dem Satz über vollkommene Zahlen (IX, 36) wiederherzustellen, dessen uns vorliegender Beweis auf jene höheren Sätze und nicht mehr auf die Sätze über Gerade und Ungerade gestützt ist. Daran knüpfen sich eine Reihe weiterer wichtiger Bemerkungen zur Geschichte der griechischen Mathematik. *Bessel-Hagen* (Bonn).

● **Pines, Salomon: Beiträge zur islamischen Atomenlehre.** Berlin: 1936. 149 S. RM. 4.—.

Sehr detaillierte Untersuchung des Atomismus vor allem im Kalām und bei al-Rāzī. Die bedeutende Rolle des letzteren für die Überlieferung des demokritisch-epikureischen Atomismus wird hervorgehoben. Das Verhältnis der Lehre des Kalām zur griechischen Theorie wird untersucht und auch die Möglichkeit eines indischen Zwischengliedes ins Auge gefaßt, zu welchem Zwecke eine kurze Darstellung des indischen Atomismus gegeben wird. Die Noten enthalten reiche Literaturangaben; ausführliche Register sind beigegeben.

O. Neugebauer (Kopenhagen).

Ginzburg, Benjamin: Duhem and Jordanus Nemorarius. Isis 25, 341—362 (1936).

Entgegen der von Duhem vertretenen Meinung gelangt Verf. auf Grund einer Prüfung der Originalwerke zu der Auffassung, daß die unter dem Namen des Jordanus überlieferten mechanischen Schriften von ihm selbst und nicht von einer Mehrheit von Autoren herrühren. Die mit vielem Fehlerhaften untermischten Fortschritte des Jordanus hätten auf die Entwicklung der modernen Statik nicht den Einfluß ausgeübt, den Duhem ihnen zuschreibt. In der Renaissance wäre alles unabhängig neu entdeckt worden.

Bessel-Hagen (Bonn).

Reimann, Dora: Historische Studie über Ernst Machs Darstellung der Entwicklung des Hebelsatzes. Quell. Stud. Gesch. Math. B 3, 554—592 (1936).

Die von Mach in seinem bekannten Buch „Die Mechanik in ihrer Entwicklung historisch-kritisch dargestellt“ bei Behandlung des Hebelsatzes erwähnten Schriften und einige weitere werden kritisch besprochen, wobei vielfach die Texte oder wenigstens die entscheidenden Textstellen in Übersetzung vorgelegt werden. An Hand der gewonnenen Einsichten wird festgestellt, daß Machs Darstellung je nach der Individualität des jeweils betrachteten Autors sehr ungleich ist. Die Abhandlung bietet, wenn keine vollständige Geschichte des Hebelsatzes, so doch reiches Material zu einer solchen.

Bessel-Hagen (Bonn).

Dittrich, Arnošt: Die Korrelation der Maya-Chronologie. Abh. preuß. Akad. Wiss., Phys.-Math. Kl. 1936, 1—39.

Launay, Louis de, Clément Limb et Claudius Roux: Sur la rectification d'un arc quelconque de cercle plus petit que la demi-circonférence, par André-Marie Ampère, âgé de treize ans (8 juillet 1788). C. R. Acad. Sci., Paris 203, 1194—1197 (1936).

Algebra und Zahlentheorie.

Mignosi, G.: Estrazione di radice dei polinomi. Esercit. Mat., II, s. 9, 96—106 (1936).

Der Verf. legt die Regeln für das Ausziehen von Wurzeln beliebiger Ordnung aus Polynomen dar.

N. Tschebotarow (Kasan).

Schulz, Werner: Zur Lage der Nullstellen von Polynomen mit reellen positiven Koeffizienten. Deutsche Math. 1, 633—635 (1936).

Es werden die Sätze bewiesen: Sind die Koeffizienten des Polynoms $f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n$ positiv und genügen sie für irgendein $k \geq 0$ bzw. $c \geq 1$ den Ungleichungen

$$a_{\nu-1} < \left(\frac{n-\nu+1}{\nu} \right)^k \cdot a_\nu \quad \text{bzw.} \quad a_{\nu-1} < c^{n-2\nu+1} \cdot a_\nu \quad (\nu = 1, 2, \dots, n),$$

so liegen die Nullstellen von $f(x)$ sämtlich im Innern des Einheitskreises. — Sind die Koeffizienten von $f(x)$ positiv, so liegen seine Nullstellen, absolut genommen, für jedes $k \geq 0$ bzw. $c \geq 1$ zwischen der größten und der kleinsten der Zahlen

$$\left(\frac{v}{n-v+1}\right)^k \frac{a_{v-1}}{a_v} \quad \text{bzw.} \quad c^{2v-n-1} \cdot \frac{a_{v-1}}{a_v} \quad (v = 1, 2, \dots, n).$$

— Diese Sätze folgen aus einem allgemeineren Satze des Verf. Sz. Nagy (Szeged).

Dieudonné, Jean: Sur les dérivées des fractions rationnelles. C. R. Acad. Sci., Paris 203, 975—977 (1936).

Verf. bezeichnet mit D bzw. Δ je eine abgeschlossene Punktmenge der komplexen Ebene, mit $P(z)$ bzw. $Q(z)$ ein beliebiges Polynom $(n+m-1)$ -ten bzw. n -ten Grades, das in D bzw. Δ mindestens p bzw. q Nullstellen hat, ferner mit E eine echte Teilmenge der komplexen Ebene, so daß E mindestens r Nullstellen von jedem Polynom

$$\Phi(P, Q, m) \equiv Q^{m+1} \frac{d^m}{dz^m} \left(\frac{P}{Q} \right)$$

enthält, und endlich mit $\varrho(p, q, D, \Delta)$ die Maximalanzahl von r . Es handelt sich in verschiedenen Fällen um die Bestimmung der Zahl ϱ . Die Beweise der ausgesprochenen Sätze dieser Arbeit werden später erscheinen. Sz. Nagy (Szeged).

Sullivan, C. T.: A rational transformation of the complex plane with applications to the roots of polynomials. Trans. Roy. Soc. Canada, III. s. 30, 31—39 (1936).

Verf. beweist einen Laguerreschen Satz (Oeuvres de Laguerre I, 56 u. 133), er scheint aber diesen Satz von Laguerre nicht zu kennen. Aus dem Laguerreschen Satze leitet Verf. einige Sätze von Grace (Proc. Cambridge Philos. Soc. 11, 352) und den folgenden Satz ab: Sind a_0 und b_0 reelle Zahlen und

$$A(z) = a_0 + a_1 z + \dots + a_n z^n, \quad B(z) = b_0 + b_1 z + \dots + b_n z^n,$$

so hat das Polynom $C(z) = \lambda A(z) + \mu B(z)$ für jede reellen Zahlen λ und μ mindestens eine Nullstelle im Innern oder am Rande des Kreises durch die Punkte $0, -\frac{na_0}{a_1}, -\frac{nb_0}{b_1}$.

Es wird auch der Satz bewiesen: Das Derivierte $A'(z)$ von $A(z)$ hat mindestens eine Nullstelle im Kreise durch die Punkte $0, -\frac{na_0}{a_1}, \frac{na_0^2}{a_1^2 - a_0(a_1 + a_2)}$. — [Bemerk. des Ref.:

Man kann auf Grund des Gauß-Lucatschen Satzes leicht einsehen, daß jedes Derivierte $A^{(k)}(z)$ ($k = 1, 2, \dots, n-1$) im Innern oder am Rande jedes Kreises durch die Punkte 0 und $-\frac{na_0}{a_1}$ mindestens einmal verschwindet.] Sz. Nagy (Szeged).

Grosschmid, Louis de, et Adolphe Szűcs: Sur un résultant remarquable. Mat. fiz. Lap. 43, 120—127 (1936) [Ungarisch].

En cherchant les racines complexes de l'équation algébrique à coefficients complexes $f(x) \equiv c_0 x^n + c_1 x^{n-1} + \dots + c_n = 0$, on est amené à poser

$$c_k = a_k + i\beta_k \quad (k = 0, 1, \dots, n), \quad x = u + iv, \quad f(x) = P(u, v) + iQ(u, v)$$

(P et Q étant deux polynômes à coefficients réels), et à chercher les solutions réelles du système d'équations $P(u, v) = 0, Q(u, v) = 0$. Peut-il arriver que le résultant de ces équations, relativement à u par exemple, est identiquement nul? La réponse est négative, et les auteurs en donnent trois démonstrations. La première est basée sur l'impossibilité qu'une équation algébrique ait plus de racines distinctes qu'il y a d'unités dans son degré. La deuxième fait état de l'unicité de la décomposition en facteurs d'un polynôme à deux variables. La troisième consiste à calculer le terme du plus haut degré en v du résultant en question et, pour abrégier les calculs, elle utilise un théorème de Jacobi sur les résultants.

Autoreferat.

Tschebotarew, N. G.: Probleme der modernen Galoisschen Theorie. (Leningrad, Sitzg. v. 24.—30. VII. 1934.) Arb. d. 2. math. Bundestag. Leningrad 1, 164—205 (1935) [Russisch].

Übersetzung eines in Comment. math. helv. 6, 235—283 (1934) (dies. Zbl. 9, 101—102) veröffentlichten Berichtes des Verf. A. Kurosch (Moskau).

MacLane, Saunders: Note on some equations without affect. Bull. Amer. Math. Soc. 42, 731—736 (1936).

Verf. stellt zwei Konstruktionsverfahren zur Bestimmung von affektlosen Gleichungen auf. Das erste stützt sich auf die Existenz gewisser kritischer Primzahlen und ist eine Modifikation des sogenannten ersten Bauerschen Verfahrens [vgl. M. Bauer, J. reine angew. Math. 132, 33—35 (1907)]. Das zweite stützt sich auf einen Satz von Dedekind über Kongruenzen nach Primzahlmoduln und ist eine Modifikation des sogenannten zweiten Bauerschen Verfahrens [vgl. M. Bauer, Math. Ann. 64, 325—327 (1907); Math. Z. 16, 318—319 (1923)].

N. Tschebotaröw (Kasan).

Cammarata, Angelo: Sui divisori dei polinomi $P(xy)$, funzioni del prodotto xy , in un dato corpo. Esercit. Mat., II. s. 9, 91—95 (1936).

Ist ein Polynom $P(xy)$ der Veränderlichen xy , als Funktion von x, y betrachtet, in irgendeinem Zahlkörper reduzibel: $P(xy) = A(x, y) \cdot B(x, y)$, so sind im Falle $P(0) \neq 0$ auch die Polynome $A(x, y)$, $B(x, y)$ Funktionen nur von xy . Ist aber $P(0) = 0$, gilt nämlich $P(xy) = (xy)^i Q(xy)$, $Q(0) \neq 0$, so hat $P(xy)$ offenbar die Teiler der Gestalt $x^r y^s Q(x, y)$, wobei die r, s den Ungleichungen $0 \leq r \leq i$, $0 \leq s \leq i$ genügen und sonst beliebig sind.

N. Tschebotaröw (Kasan).

Borůvka, Ottokar: Sur les matrices singulières. C. R. Acad. Sci., Paris 203, 600—602 (1936).

Haben die Potenzen X^k einer Matrix X vom Grade n von einer Stelle $k = \alpha$ ab alle denselben Rang j , so wird $n - j$ als Geschlecht und α als Rang von X bezeichnet. Dann werden die folgenden unschwierig beweisbaren Sätze aufgestellt: I. Hat X genau m charakteristische Wurzeln 0, so hat es das Geschlecht m . II. Das Minimalpolynom von X ist im zugrunde gelegten Körper K dann und nur dann reduzibel, wenn es in K Polynome $Q(x)$ gibt, für die $Q(X)$ ein Geschlecht ≥ 1 hat und $Q(X) \neq 0$ ist. Außerdem wird eine Regel für die Bestimmung des Geschlechts von $Q(X)$ für ein beliebiges Polynom $Q(x)$ aus K gegeben. Die vom Verf. bewiesene Ungleichung $\alpha \leq 2^{n-j+1}$ zwischen dem Index α und dem Geschlecht $n - j$ von X kann leicht durch $\alpha \leq n - j$ ersetzt werden.

R. Brauer (Toronto).

Krasner, Marc: Sur la représentation multiplicative dans les corps de nombres P -adiques relativement galoisiens. C. R. Acad. Sci., Paris 203, 907—908 (1936).

Sei k ein p -adischer Zahlkörper vom Grade n über dem rationalen p -adischen Zahlkörper, K ein galoisscher Körper über k und Γ der Gruppenring von K mit ganzen p -adischen Koeffizienten. Die Gruppe A der Einseinheiten von K besitzt Γ als Operatorenbereich. Ein kleinstmögliches Erzeugendensystem von A in bezug auf diesen Operatorenbereich Γ setzt sich zusammen aus genau n Erzeugenden $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ derart, daß $A/\alpha_1^\Gamma \dots \alpha_n^\Gamma$ endlich ist, und einer gewissen Anzahl λ von weiteren Erzeugenden $\beta_1, \dots, \beta_\lambda$. Diese Zusatzanzahl λ bestimmt sich folgendermaßen: Es sei K_0 der (erste) Verzweigungskörper für K/k und $A_0/H_0 \cap A_0$ die Faktorgruppe der Einseinheitengruppe A_0 von K_0 nach ihrem Durchschnitt mit der Normgruppe H_0 von K/K_0 . Diese Faktorgruppe besitzt den ganz- p -adischen Gruppenring Γ_0 von K_0/k als Operatorenbereich. Es sei μ die kleinste Erzeugendenanzahl von $A_0/H_0 \cap A_0$ in bezug auf Γ_0 . Dann ist $\lambda = \mu$ oder $\mu + 1$, und zwar tritt das letztere höchstens dann ein, wenn K die p -ten Einheitswurzeln enthält. Daraus folgt: 1. Der „ Γ -Rang“ $n + \lambda$ von K/k ist derselbe wie für den größten über K_0 abelschen Teilkörper von K/k . 2. Dann und nur dann ist $\lambda = 0$, wenn $K = K_0$ ist und die p -ten Einheitswurzeln nicht enthält. 3. Es ist stets $\lambda \leq n + 2$, und wenn K die p -ten Einheitswurzeln enthält, sogar $\lambda \leq n$. — Wenn der irregulär verzweigte Bestandteil K/K_0 abelsch ist, ist K aus μ über K_0 unabhängigen über k galoisschen Teilkörpern K_i zusammengesetzt, und man kann die Zusatz erzeugenden $\beta_1, \dots, \beta_\lambda$ so wählen, daß β_i in K_i liegt und die $N_{K_i/K_0}(\beta_i)$ ($i = 1, \dots, \mu$) ein Erzeugendensystem für $A_0/H_0 \cap A_0$ in bezug auf Γ_0 bilden. Hasse (Göttingen).

Chevalley, C.: Généralisation de la théorie du corps de classes pour les extensions infinies. J. Math. pures appl., IX. s. 15, 359—371 (1936).

k sei ein algebraischer Zahlkörper endlichen Grades und Z eine Abelsche Erweiterung von k . Die über k endlichen Z können durch Idealgruppen innerhalb k charakterisiert werden. Verf. fragt, ob ein entsprechender Sachverhalt auch für unendliche Z gilt; der Versuch, einem über k unendlichen Z als Idealgruppe in k den Durchschnitt der Idealgruppen zuzuordnen, welche den in Z enthaltenen endlichen Z' entsprechen, führt zu keinem Erfolg. In der vorliegenden Arbeit wird nun aber gezeigt, daß man zu einer einheitlichen Charakterisierung aller Z , der endlichen wie der unendlichen, gelangen kann, wenn man ihnen nicht Idealgruppen, sondern Gruppen aus „idealen Elementen“ (abgekürzt: Idele) zuordnet. — Ist k_p^* die multiplikative Gruppe der Elemente $\neq 0$ aus k_p (p = endlicher oder unendlicher Primteiler), dann werden als Idele a von k diejenigen Elemente des direkten Produktes aller k_p^* bezeichnet, für die fast alle Komponenten a_p p -adische Einheiten sind; die Idele a von k bilden eine multiplikative Gruppe k^* (vgl. die Definition der idealen Zahlen bei Prüfer, Math. Ann. 1925, 198). Gibt es zu einem a in k eine Zahl α , so daß für jedes p $a_p = L_p(\alpha)$ ist — L_p ein Isomorphismus, der k in k_p hinein abbildet —, so heißt a Haupt-Idele. Die Gruppe der Hauptidele P_k ist isomorph zur multiplikativen Gruppe der Zahlen $\neq 0$ aus k . Die konjugierten a^τ in den konjugierten k^τ sind bestimmt durch: $a_p^\tau = \tau(a_p)$; Relativnorm und multiplikative Kongruenz nach einem Teiler $m = \prod p_i^{e_i}$, $e_i > 0$, werden für Idele genau wie für Zahlen definiert. Die Kongruenz wird verschärft zur Überkongruenz durch die Festsetzung: $a \equiv b \pmod{m} \leftrightarrow a \equiv b \pmod{m}$ und $a_p \cdot b_p^{-1} = p'$ -adische Einheit für $p' \nmid m$. Die Idele $e \equiv 1 \pmod{1}$ bilden die Gruppe U_k der Einheits-Idele; deren Durchschnitt mit P_k ist die Gruppe der Einheiten von k . Die Klassen von k^*/U_k bilden eine Gruppe, die zur Gruppe der Dedekindschen Ideale von k isomorph ist. Das der Klasse $\text{mod } U_k$ von a entsprechende Ideal wird durch (a) gekennzeichnet. — Jeder Kongruenzgruppe $\bar{H} \pmod{m}$ in k wird eine Untergruppe H von k^* zugeordnet, welche aus P_k und den $a \equiv 1 \pmod{m}$ mit $(a) \in \bar{H}$ besteht. Diese Zuordnung erweist sich als nach beiden Seiten eindeutig. Eine endliche Erweiterung Z von k kann somit genau wie durch die Idealgruppe $\bar{H}_{Z/k}$ (Führer f) auch durch die dieser zugeordnete Idelegruppe $H_{Z/k}$ charakterisiert werden. Wie sich zeigt, besteht $H_{Z/k}$ aus P_k und den Relativnormen der Idele von Z . Eine isomorphe Zuordnung zwischen der Klassengruppe $\text{mod } H_{Z/k}$ und der Galois-Gruppe von Z/k wird durch das verallgemeinerte Artin-Symbol $(a, Z/k) = \left(\frac{Z/k}{(a_1)} \right)$ geliefert, wobei $a = \alpha \cdot a_1$ mit $\alpha \in P_k$, $a_1 \equiv 1 \pmod{f}$ ist. — Ist Z eine unendliche Erweiterung von k , so wird die Galois-Gruppe g von Z/k als topologische Gruppe angesehen. Diese enthält zu jedem a ein eindeutig bestimmtes $\sigma = (a, Z/k)$ mit der Eigenschaft $\sigma = (a, Z'/k)$ in jedem endlichen Z' zwischen k und Z . Wird der Erweiterung Z jetzt die Gruppe der a mit $(a, Z/k) = 1$ als $H_{Z/k}$ zugeordnet, so ist $H_{Z/k}$ der Durchschnitt der den endlichen Zwischenkörpern Z' zugeordneten Idelegruppen; zugleich hat das Symbol $(a, Z/k)$ definitionsgemäß die Eigenschaft: $(a, Z/k) = 1 \rightarrow a \in H_{Z/k}$. Es wird gezeigt, daß $a \rightarrow (a, Z/k)$ eine isomorphe Zuordnung zwischen $k^*/H_{Z/k}$ und g darstellt. Dazu wird in k^* eine Topologie im Sinne von Sierpiński (Introd. to general top. 1934) eingeführt. Als offene Mengen werden hierbei Mengen O genommen mit der Eigenschaft: Zu jedem $a \in O$ gibt es ein ganzes m , so daß auch $a U_m \subset O$, wobei U_m die Gruppe der Idele $a \equiv 1 \pmod{m}$ ist. Damit erweist sich $a \rightarrow (a, Z/k)$ als eine stetige Abbildung von k^* auf g und also $H_{Z/k}$ als eine abgeschlossene Untergruppe von k^* , die im besonderen mit P_k auch die Adhärenz \bar{P}_k von P_k , d. h. die kleinste abgeschlossene, P_k umfassende, Menge enthält. — Ist schließlich A der Kompositionskörper aus allen Abelschen Erweiterungen von k und \mathfrak{G} die Galois-Gruppe von A/k , so erweist sich die durch $a \rightarrow (a, A/k)$ gegebene Homomorphie zwischen k^*/\bar{P}_k und \mathfrak{G} als eine Isomorphie. Die einer Abelschen Erweiterung Z von k entsprechende

Gruppe $H_{Z/k}$ setzt sich also aus den Idelen zusammen, deren $(a, A/k)$ zur Galois-Gruppe von A/Z gehört, und umgekehrt ist die Galois-Gruppe von A/Z die Gesamtheit der $(a, A/k)$ mit $a \in H_{Z/k}$. Die zu Eingang gestellte Frage ist beantwortet durch das Existenztheorem: Die den Abelschen Erweiterungen Z von k entsprechenden Gruppen $H_{Z/k}$ sind abgeschlossene Untergruppen von k^* , welche P_k enthalten. — Folgendes Ergebnis wird ohne Beweis mitgeteilt: Eine unendliche Abelsche Erweiterung Z von k ist eindeutig bestimmt durch die Gesamtheit der $Z \cdot k_p$. (p durchläuft alle Primteiler von k .)

Grunwald (Halle a. d. S.).

Fitting, F.: Über magische Stern-Vielecke. Deutsche Math. 1, 569—577 (1936).

Um die Zahlen 0, 1, ..., 26 so in die 27 „Eckpunkte“ eines Sternneunecks zu schreiben, daß je 6 Zahlen einer „Seite“ immer die Summe 78 ergeben, schreibt Verf. jede Zahl mit 3 Ziffern im Zahlensystem der Grundzahl 3 und bildet 3 Hilfsneunecke, die resp. aus den 1^{sten}, 2^{sten} und 3^{sten} Ziffern bestehen. Auch 12-Ecke. *Beeger.*

Rados, Gustav: Die vollkommene Lösung einer numerischen Kongruenz. Mat. fiz. Lap. 43, 115—119 (1936) [Ungarisch].

Es wird bewiesen: Die Kongruenz mit dem ungeraden Primzahl-Modul p

$$x^{p-2} + 2x^{p-3} + 3x^{p-4} + \dots + (p-2)x + p-1 \equiv 0 \pmod{p}$$

hat die einzige Wurzel

$$x \equiv 1 \pmod{p},$$

und ihre Multiplizität ist genau $p-2$. Vermittels dieses Satzes ergibt sich unmittelbar, daß der Rang der zyklischen Determinante

$$C = \begin{vmatrix} 1 & 2 & \dots & p-2 & p-1 \\ 2 & 3 & \dots & p-1 & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ p-1 & 1 & \dots & p-3 & p-2 \end{vmatrix}$$

mod p genau gleich $p-2$ ist.

Autoreferat.

Erdős, Paul, and Paul Turán: On some sequences of integers. J. London Math. Soc. 11, 261—264 (1936).

Let $a_1 < a_2 < \dots < a_r \leq n$ be a set of positive integers such that $a_i - a_j \neq a_j - a_k$ for $1 \leq k < j < i \leq r$. For given n let $r(n)$ be the maximum value of r for which such a set exists. The authors prove that (1) $r(2n) \leq n$ for $n \geq 8$, (2) $\limsup r(n)/n \leq \frac{4}{9}$. They conjecture that $r(n) = o(n)$, and G. Szekeres conjectures that $r(\frac{1}{2}(3^k + 1)) = 2^k$.

Davenport (Cambridge).

Estermann, T.: On the representations of a number as a sum of squares. Acta Arithmet. 2, 47—79 (1936).

The identity $\left(\sum_{-\infty}^{\infty} e^{\pi i m^2 \tau} \right)^s = \sum_0^{\infty} r_s(n) e^{\pi i n \tau}$ is used, in a more elementary way than has been done before, to give analytical proofs of known formulae for $r_s(n)$, the number of integer solutions of $x_1^2 + \dots + x_s^2 = n$, in the cases $s = 5, 6, 7, 8$. (Cf. Hardy, Trans. Amer. Math. Soc. 21, 255—284; Mordell, Quart. J. Math. 48, 93—104 and Trans. Camb. Phil. Soc. 22, 361—372.) In Part 1 the fundamental identity

$$r_s(n) = c n^{\frac{1}{2}s-1} S(n), \quad S(n) = \sum_{k=1}^{\infty} A_k \quad (s = 5, 6, 7, 8),$$

where c depends only on s , and

$$A_k = \sum_h \left\{ \frac{1}{2k} \sum_{q=1}^{2k} \xi_{2k}^{hq^2} \right\}^s \xi_{2k}^{-nh} \quad [\xi_m = e^{2\pi i/m}, 0 < h \leq 2k, (h, k) = 1],$$

is proved without appeal to the theory of modular functions. The principal novelty lies in the method by which powers of theta functions, such as $\vartheta_3^s(\tau) = \vartheta_3^s(0|\tau)$, are identified with functions of the type $L + \sum_r l(r)(ir - i\tau)^{-\frac{1}{2}s}$ (r rational). This is based on the following theorem (which takes the place of the theorem that a modular function

which is bounded in a fundamental polygon is a constant): If D_1 and D_2 are domains, E is a closed bounded set contained in D_1 and containing D_2 , and $f(z)$ is regular in D_1 and real on the boundary of E , then $f(z)$ is constant. In Part 2 Jacobi's formula for $r_8(n)$ and the Eisenstein-Smith-Minkowski formula for $r_5(n)$ are deduced by a new method of transforming the series $S(n)$. The whole paper is intelligible to a reader who knows nothing of modular functions, theta functions, or Gaussian sums. *Ingham*.

Tambs Lyche, R.: La valeur moyenne de la fonction $\varphi(n)$ d'Euler. *Norske Vid. Selsk., Forh.* 9, 58—61 (1936).

Let $\varphi(m)$ denote as usual the number of numbers not exceeding n and prime to n , and

$$\Phi(n) = \varphi(1) + \varphi(2) + \dots + \varphi(n).$$

The author shows that

$$\Phi(n) = \frac{1}{2} \left(1 + \sum_{r=1}^n \mu(r) \left[\frac{n}{r} \right]^2 \right),$$

where $\mu(r)$ is the function of Möbius, and deduces that

$$\frac{\Phi(n)}{n^2} = \frac{3}{\pi^2} + \Theta \frac{\log n}{n}, \quad -1 < \Theta < 1.$$

This improves a result given by Kronecker, *Vorlesungen über Zahlentheorie*, Bd. 1, p. 329. *E. C. Titchmarsh* (Oxford).

Walfisz, Arnold: Teilerprobleme. V. *Acta Arithmet.* 2, 80—133 (1936).

Es sei $\sigma(n)$ die Summe der reziproken Teiler der natürlichen Zahl n ; $n\sigma(n)$ ist also die Summe der Teiler von n . Man setze

$$\sum_{n \leq x} \sigma(n) = \frac{1}{6} \pi^2 x - \frac{1}{2} \log x + T_0(x), \quad \sum_{n \leq x} n\sigma(n) = \frac{1}{12} \pi^2 x^2 + T(x).$$

Das Hauptergebnis dieser Arbeit lautet: für $\nu = 0, 1, 2, 3, 4$ ist

$$\int_0^x T(2^\nu u) T(u) du = (2^\nu/12 + (5 + 3\nu)\pi^2/432) x^3 + O(x^{5/2}). \quad (1)$$

Daraus folgt (C = Eulersche Konstante)

$$\int_0^x T_0^2(u) du = \left(\frac{1}{4} (C + \log 2\pi)^2 + \frac{5}{144} \pi^2 \right) x + O(x^{1/2}). \quad (2)$$

Weiter sei

$$Q_0 = n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 + n_4^2, \quad Q_1 = n_1^2 + n_2^2 + 2n_3^2 + 2n_4^2, \quad Q_2 = n_1^2 + 2n_2^2 + 2n_3^2 + 4n_4^2;$$

$P_m(x) = \sum_{Q_m \leq x} 1 - W_m(x)$ ($m = 0, 1, 2$) sei der geläufige Gitterrest ($W_m(x)$ bedeutet den

Inhalt des Ellipsoids $Q_m \leq x$). Dann ist

$$\int_0^x P_m^2(u) du = c_m \pi^2 x^3 + O(x^{5/2}); \quad c_0 = 2/3, \quad c_1 = 1/6, \quad c_2 = 1/24. \quad (3)$$

(3) folgt aus (1), indem man $P_m(x)$ auf bekannte Weise als lineare Kombination der $T(x/2^\nu)$ ($\nu = 0, \dots, 4$) darstellt. — (1), (2), (3) mit einem um einen Faktor $\log x$ ungünstigeren Restglied ist vom Verf. bereits früher bewiesen worden; z. B. steht (1) mit dem Restglied $O(x^{5/2} \log x)$ in seiner Arbeit „Über Gitterpunkte in mehrdimensionalen Ellipsoiden V“ (dies. Zbl. 13, 105), Formel (VI). Verf. verschärft jetzt seine ältere Methode, indem er das Restglied als eine Summe von Gliedern von der Gestalt $a_i x^{5/2} \log x + O(x^{5/2})$ ausdrückt, wobei sich schließlich herausstellt, daß $\sum a_i = 0$ ist, woraus das Restglied $O(x^{5/2})$ resultiert. — Druckfehler: S. 92, Z. 4 lies 6 statt 8; S. 99, Z. 4, letzter Ausdruck: lies $(m, n) = 1$ (statt $= r$); S. 110, (92): lies $2^\nu a n > 2^{\nu b} m$ (statt $<$); S. 110, (95): lies $n \leq \sqrt{2^\nu x}$; S. 112, (103): lies $+ Bx^{5/2}$ (statt $= Bx^{5/2}$); S. 118, Z. 10: lies α statt a ; S. 118, Z. 12: im ersten Summand fehlt der Faktor g . (IV. vgl. dies. Zbl. 14, 150.) *Jarník* (Praha).

Corput, J. G. van der, und G. Schaake: Anwendung einer Blichfeldtschen Beweismethode in der Geometrie der Zahlen. *Acta Arithmet.* 2, 152—160 (1936).

Ist $f(x)^{\frac{1}{\sigma}}$ eine Strahldistanz, V das Volumen des Eichkörpers, so gilt nach Minkowski

$$f(x) \leq \frac{2^{\sigma}}{V^{\frac{1}{n}}}.$$

Verff. behalten die Voraussetzung bei, daß $f(x)$ positiv definit ist, nehmen aber statt der Dreiecksungleichung und der Symmetriebedingung andere Voraussetzungen. Damit erhalten sie Schranken, die in vielen Fällen besser sind. Die neuen Voraussetzungen sind insbesondere für positiv definite quadratische Formen erfüllt und ergeben dann die Blichfeldtsche Schranke. Für ein System von reellen und konjugiert komplexen Linearformen ergibt sich eine Schranke, die in mehreren Fällen schärfer als die Minkowskische ist. Der Ideengang der Arbeit lehnt sich an den Beweis des Blichfeldtschen Satzes durch Remak an. *Hofreiter (Wien).*

Khintchine, A.: Ein Satz über lineare diophantische Approximationen. *Math. Ann.* 113, 398—415 (1936).

Verf. zeigt den folgenden Satz: $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n$ seien reelle Zahlen. Damit eine positive Konstante $\Gamma = \Gamma(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n)$ existiert von der Beschaffenheit, daß die Ungleichungen

$$0 < x < \Gamma t^n, \quad |x\theta_i - y_i - \alpha_i| < \frac{1}{t} \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

für alle $t \geq 1$ und alle reellen α_i in ganzen x, y_i lösbar sind, ist die Existenz einer zweiten positiven Konstante $\gamma = \gamma(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n)$ notwendig und hinreichend, die so beschaffen ist, daß die Ungleichungen

$$0 < x < \gamma t^n, \quad |x\theta_i - y_i| < \frac{1}{t} \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

für kein $t > 1$ ganze Lösungen x, y_i haben. — Überraschend ist, daß hier die Verhältnisse (anders als bei den meisten Problemen dieses Gebiets) im mehrdimensionalen Fall ($n > 1$) genau so liegen wie im eindimensionalen ($n = 1$). (Für Lit. s. den Bericht des Ref.: Diophantische Approximationen [*Erg. Math.* IV, 4 (1936)], Kap. VII.) Der Beweis für die Notwendigkeit ist kurz und leicht, jener für das Hinreichen zwar elementar, aber keinesfalls einfach. Das Schubfachprinzip spielt dabei eine Rolle.

J. F. Koksma (Amsterdam).

Koksma, J. F.: Approximation von Irrationalzahlen mittels Kettenbrüchen. *Mathematica, Leiden* B 5, 98—104 (1936) [Holländisch].

Chen, Kien-Kwong: Transcendency of functions satisfying riccati differential equation. *J. Chin. Math. Soc.* 1, 70—80 (1936).

In § 1 seiner Arbeit: „Über einige Anwendungen Diophantischer Approximationen“, *Abh. preuß. Akad. Wiss.* 1930, zeigte C. L. Siegel u. a. folgenden Hilfssatz: „Die Gleichung

$$W' + \frac{1}{x} W + \left(1 - \frac{\lambda^2}{x^2}\right) + W^2 = 0$$

hat dann und nur dann eine algebraische Lösung, die alsdann eine rationale Funktion ist, wenn 2λ eine ungerade ganze Zahl ist.“ Verf. verallgemeinert die Siegelschen Überlegungen und beweist: „Sind $R(x) \not\equiv 0$, $S(x)$, $T(x)$ rationale Funktionen, so ist jede Lösung $W(x)$ der Gleichung

$$W' + \frac{R'}{R} W + S + TW^2 = 0$$

entweder transzendent oder algebraisch von höchstens zweitem Grad über dem Körper der rationalen Funktionen in x .“ Die Gleichung

$$W' + \frac{1}{x} W + \frac{x+16}{16x^3} + W^2 = 0 \quad \text{mit der Lösung} \quad W = \frac{1}{4x} + \frac{1}{x\sqrt{x}}$$

zeigt, daß der Grad 2 nicht verkleinert werden kann. — Aus diesem Satz gewinnt Verf. weiter das Ergebnis: „Sind $R(x) \neq 0$, $S(x)$ zwei rationale Funktionen, so ist jede algebraische Lösung der Gleichung

$$y'' + \frac{R'}{R} y' + Sy = 0$$

von der Form $(r(x))^{1/p}$, wo r eine rationale Funktion, p eine natürliche Zahl bedeutet.“

K. Mahler (Krefeld).

Analysis.

Cavallaro, Vincenzo G.: Nuove formule approssimate relative a lati di poligoni superiori, ai numeri e , π , alla costante d'Eulero, etc. Giorn. Mat. Battaglini, III. s. 74, 71—80 (1936).

Hostinský, Bohuslav: Sur la superposition de deux sinusoides. C. R. Acad. Sci., Paris 203, 918—919 (1936).

Bemerkungen zur Verteilung der Werte t , für welche der Ausdruck

$$x = A \sin(at + \alpha) + B \sin(bt + \beta)$$

eine Schranke m überschreitet.

Theodor Zech (Darmstadt).

Fabian, W.: Fractional calculus. Philos. Mag., VII. s. 22, 1108—1116 (1936).

Fabian, W.: Fractional calculus. Math. Gaz. 20, 249—253 (1936).

This paper contains results concerning the relationship between the singularities of an analytic integrand $f(z)$ and of its integral of a fractional order λ . J. D. Tamarkin.

Popoviciu, Tiberiu: Sur certains problèmes de maximum de Stieltjes. Bull. Math. Soc. Roum. Sci. 38, H. 1, 73—96 (1936).

Detailed exposition of the results formulated in the note: C. R. Acad. Sci., Paris 202, 1645; this Zbl. 14, 209. In the formula (3) on p. 75 a_n has to be replaced by $-a_n$. Concerning the general result (4) see Frobenius, Berliner Ber. 1894, 214. G. Szegő.

Ward, Morgan: The null divisors of linear recurring series. Duke math. J. 2, 472—476 (1936).

Given the recurrent sequence (*) $\{u_n\}$, $n = 0, 1, 2, \dots$, satisfying a difference equation of order k

$$\Omega_{n+k} = c_1 \Phi_{n+k-1} + \dots + c_k \Omega_n$$

($u_0, u_1, \dots, u_{k-1}, c_1, \dots, c_k$ — given rational integers, $c_k \neq 0$). The present paper — a continuation of a previous one [id., Trans. Amer. Math. Soc. 35, 600—628 (1933); this Zbl. 7, 249] seeks to determine all of the “nul divisors” of (*), i.e. numbers m such that

$$u_n \equiv 0 \pmod{m}, n \geq v; u_{v-1} \not\equiv 0 \pmod{m}$$

[v = “numeric” modulo m of (*)]. The arithmetical properties of the persymmetric determinant $[u_{i+j}]_{0}^{k-1}$ of order k play here an important role. J. Shohat.

Levinson, Norman: On the closure of $\{e^{i\lambda_n x}\}$. Duke math. J. 2, 511—516 (1936).

In extending considerably a previous result by Paley and Wiener [Amer. Math. Soc. Colloquium Publications, 19, Chap. VI (1935)] the author proves the following results: Let $n/\lambda_n \rightarrow 1$ as $|n| \rightarrow \infty$. Let $A(u)$ be the number of $|\lambda_n| \leq u$. If

$\int_1^v A(u)/u \, du > 2v - (p-1)/p \log v - C$, C a constant, then the set $\{e^{i\lambda_n x}\}$, $-\infty < n < \infty$,

is closed $L^p(-\pi, \pi)$, $p \geq 1$. — If (*) $|\lambda_n - n| \leq N/2 + (p-1)/(2p)$ then the set $\{e^{i\lambda_n x}\}$, if it is not closed, becomes closed on adjoining to it any N terms $e^{i\mu_n x}$, $1 \leq n \leq N$; this result is the best possible in the sense that it does not hold anymore if the right-hand member of (*) is increased by δ , no matter how small is $\delta > 0$. J. D. Tamarkin.

Reihen:

Cooper, R.: Note on the theory of series. J. London Math. Soc. 11, 264—270 (1936).

Es handelt sich um Paare von Reihen $\sum u_n, \sum v_n$, von denen die eine divergent, die andere konvergent ist, während ihre Glieder in der Beziehung $u_n \sim v_n$ stehen.

Man erkennt leicht, daß es zu jeder bedingt konvergenten Reihe $\sum v_n$ divergente Reihen $\sum u_n$ mit $u_n \sim v_n$ gibt; ebenso daß es divergente Reihen $\sum u_n$ mit $u_n \rightarrow 0$ gibt, zu denen keine konvergente Reihe $\sum v_n$ mit $v_n \sim u_n$ existiert. Anknüpfend an die letztere Tatsache wirft Verf. die Frage nach denjenigen divergenten Reihen $\sum u_n$ auf, zu denen es konvergente Reihen $\sum v_n$ mit $v_n \sim u_n$ gibt. Er beweist dazu die beiden Kriterien: (1) Ist $\sum u_n$ eine divergente Reihe mit beschränkten Gliedern, so existiert dazu dann und nur dann eine konvergente Reihe $\sum v_n$ mit $v_n \sim u_n$, wenn für jede im strengen Sinne monotone Folge natürlicher Zahlen $\{n_r\}$, für die die Summen $\sum_{n_r+1}^{n_{r+1}} |u_r|$ beschränkt sind, $\lim_{r \rightarrow \infty} \sum_{n_r+1}^{n_{r+1}} u_r = 0$ gilt. (2) Existiert für die divergente Reihe $\sum u_n$ eine im strengen Sinne monotone Folge natürlicher Zahlen $\{n_r\}$, für die $\lim_{r \rightarrow \infty} \sum_{n_r+1}^{n_{r+1}} |u_r| = 0$, $\sum_{n_r+1}^{n_{r+1}} u_r = o\left(\sum_{n_r+1}^{n_{r+1}} |u_r|\right)$ gilt, so gibt es eine konvergente Reihe $\sum v_n$ mit $v_n \sim u_n$. Verf. zeigt, daß die den divergenten Reihen $\sum u_n$ durch die beiden Kriterien auferlegten Bedingungen eine in gewissem Sinne gleichmäßige Verteilung der Amplituden der Glieder u_n fordern.

F. Lösch (Stuttgart).

Corput, J. G. van der: Generalization of an inequality of Knopp. Akad. Wetensch. Amsterdam, Proc. 39, 1053—1055 (1936).

Es sei $a_n \geq 0$ (nicht alle $a_n = 0$), $q > 0$, $0 < u \leq 1$ und

$$F(u) = \sum_{n=0}^{\infty} u^n \left(a_0^{\binom{n}{0} q^n} a_1^{\binom{n}{1} q^{n-1}} \dots a_n^{\binom{n}{n} q^0} \right)^{(q+1)^{-n}}.$$

Knopp [J. London Math. Soc. 5 13—21 (1930)] hat bewiesen

$$F(1) < (q+1) \sum_{n=0}^{\infty} a_n,$$

falls die letzte Reihe konvergiert. Für festes q ist hier $q+1$ die beste Konstante. Verf. beweist, daß allgemein

$$F(u) \leq \frac{(q+1)v^q}{u^{q+1}} \sum_{n=0}^{\infty} a_n, \quad (1)$$

wo v im Intervall $0 \leq v \leq 1$ bei festen u und q eindeutig durch die Relation

$$(q+1)v^q - qv^{q+1} = u^{q+1}$$

bestimmt wird; $(q+1)v^q/u^{q+1}$ ist dann die beste Konstante. Für $u=1$ gilt in (1) immer das Ungleichheitszeichen, während für $0 < u < 1$ dann und nur dann Gleichheit auftritt, wenn

$$a_n = p \frac{v^{q(q+1)n}}{u^{(q+1)n}} \quad (p > 0).$$

T. Ridder (Groningen).

Levin, V.: Two remarks on Hilbert's double series theorem. J. Indian Math. Soc., N. s. 2, 111—115 (1936).

The first remark is particularly interesting. It is shown that in the well-known inequality

$$\sum \frac{a_m b_n}{m+n+1} < \pi (\sum a_m^2)^{1/2} (\sum b_n^2)^{1/2}, \quad (m, n = 0, 1, 2, \dots),$$

the factor $(m+n+1)^{-1}$ can be replaced by the larger one

$$(m+n) \log(m+n) + (m+n+2) \log(m+n+2) - 2(m+n+1) \log(m+n+1).$$

The second remark concerns an extension of Hilbert's theorem (Hardy-Littlewood-Pólya, Inequalities, p. 253); for the bound of this extension a better estimate is given.

G. Szegő (St. Louis, Mo.).

Montel, Paul: Sur les fonctions définies par des séries à coefficients récurrents. C. R. Acad. Sci., Paris 203, 655—657 (1936).

The following questions are studied. For what sequences $\{u_n, v_n\}$ does the trigonometric series

$$\sum (u_n \cos nx + v_n \sin nx)$$

represent a rational function of $\cos x$ and $\sin x$? For what coefficients $\{u_n\}$ does the series $\sum u_n P_n(x)$ of Faber polynomials represent a rational function? In both cases the coefficients have to satisfy certain linear recursion formulas with constant coefficients for which the moduli of the zeros of the characteristic equation are <1 and ≤ 1 respectively.

G. Szegő (St. Louis, Mo.).

Moursund, A. F.: Abel-Poisson summability of derived conjugate Fourier series. *Duke math. J.* **2**, 485—491 (1936).

The paper contains several results concerning Abel summability of a r -th derived conjugate trigonometric series, which cannot be reproduced here due to lack of space and complexity of notation. These results represent a generalization of those obtained by various other writers, including the author himself, in case $r = 0, 1$. *Tamarkin.*

Bochner, Salomon: Summation of multiple Fourier series by spherical means. *Trans. Amer. Math. Soc.* **40**, 175—207 (1936).

Let $f(x)$ be an almost periodic function of a Stepanoff class S_p , $p \geq 1$ over a k -dimensional Euclidean space R_k , $x = (x_1, x_2, \dots, x_k)$. Let

$$(*) \quad f(x) \sim \sum a_{n_1 \dots n_k} \exp[i(n_1 x_1 + \dots + n_k x_k)]$$

be the corresponding Fourier series of $f(x)$. The author is concerned with a method of summation of $(*)$ by "spherical shells" introducing the "partial sums"

$$(**) \quad S_R^q(x) \sim \sum \varphi(r/R) A_{n_1 \dots n_k}(x)$$

where $r^2 = n_1^2 + \dots + n_k^2$ and $A_{n_1 \dots n_k}(x)$ is the general term of $(*)$. Here $\varphi(t)$ is a given function, $\varphi(0) = 1$, satisfying various restrictive conditions. The cases $\varphi(t) = e^{-t}$, e^{-t^δ} , $K_\delta(t)$, where $K_\delta(t) = (1-t^2)^\delta$ or 0 according as $0 \leq t < 1$ or $1 \leq t$, correspond to Abel-Poisson summation, to Gauss-Sommerfeld or to Riesz summation

of order δ , respectively. It is shown that $(\dagger) \quad S_R^q(x) = R \int_0^\infty f_x(t) H_\varphi(Rt) dt$ where the kernel $H_\varphi(c) = c^{-1} \int_0^\infty \varphi(u/c) u^{l+1} J_l(u) du$, $2l = k - 2$, $J_l(u)$ is the Bessel function of order l , does not depend on $f(x)$, and $f_x(t) = (2\pi)^{-k/2} \int f(x + t\xi) d\xi$ where

$\xi = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_k)$ and the integration is extended over the unit ϑ sphere σ : $\xi_1^2 + \dots + \xi_k^2 = 1$. It appears that, under suitable restrictions on $\varphi(t)$ of a rather general type, concerning its integrability over infinite range and differentiability of a sufficiently high order, $(\dagger\dagger) \quad \lim_{R \rightarrow \infty} S_R^q(x) = 2^l \Gamma(l+1) s$ provided that

$\lim_{t \rightarrow 0} t^{-k} \int_0^t |f_x(t) - s| dt = 0$. Thus conditions of summability of $(*)$ by means of

spherical shells are of a local nature and depend only on the behaviour of $f(x)$ in a neighborhood of x , in a striking contrast with known facts concerning the summability of $(*)$ by usual "rectangular" means. Analogous results hold if the Fourier series $(*)$ is replaced by the Fourier integral. The case of the Riesz kernel is studied with a great care, revealing various peculiarities which are different in the case of a series and in the case of an integral. The author studies also the questions of convergence and of absolute convergence of $(*)$, grouping its terms by spherical shells ($\varphi(t) \equiv 1$) and obtains sufficient conditions bearing upon $f_x(t)$ alone, but not upon $f(x)$. At the end of the paper a gap theorem concerning $(*)$ is obtained. *J. D. Tamarkin.*

Astrachan, Max: Studies in the summability of Fourier series by Nörlund means. *Duke math. J.* **2**, 543—568 (1936).

Let (N, p_ν) be a regular Woronoi-Nörlund method of summability. The author discusses the "effectiveness" of this method for summation of trigonometric series of various classes under suitable restrictions on $\{p_\nu\}$. As a typical result we shall quote the following. Let $f(x)$ be any periodic (of period 2π) and L -integrable function, $\varphi(t) = f(x+t) + f(x-t) - 2f(x)$, $\psi(t) = f(x+t) - f(x-t)$. A point x is said to

be K_α regular [or \tilde{K}_α regular] if $\varphi(t)$ [or $\psi(t)$] is $(C \cdot \alpha)$ continuous at $t = 0$. The method (N, p_r) is said to be K_α effective if it sums the Fourier series of $f(x)$ to the value $f(x)$ at all K_α regular points, and \tilde{K}_α effective if it sums the conjugate series to the value of the conjugate function $\hat{f}(x)$ at all \tilde{K}_α regular points. Finally let $P_n = p_0 + p_1 + \dots + p_n$, $p_0 = 1$, $p_{-1} = 0$. Then the regular method (N, p_r) is K_α and \tilde{K}_α effective ($0 < \alpha \leq 1$) if the following conditions are satisfied

$$(I) \ n |p_n| = O(|P_n|); \quad (II) \ \sum_{k=1}^n k |p_k - p_{k-1}| = O(|P_n|);$$

$$(III) \ \sum_{k=1}^n k(n-k) |p_k - 2p_{k-1} + p_{k-2}| = O(|P_n|); \quad (IV) \ \sum_{k=1}^n |P_k| k^{-2} = O(|P_n| n^{-1}).$$

Analogue results are obtained for the $(N, p_r) \cdot (C \cdot 1)$ method, and also for the summation of the r -th derived of a Fourier series and of the conjugate series, and for the strong summability.

J. D. Tamarkin (Providence, R. I.).

Differentialgleichungen, Potentialtheorie:

Grosheide F. Wzn., G. H. A.: Über Differentialoperatoren, Minimalpolynome und Differentialgleichungen. *Compositio Math.* 3, 373—379 (1936).

For a given $A = \sum_{i=1}^n a_i \frac{\partial}{\partial x_i}$, a polynomial $P(A) = \prod_{i=1}^v (A - p_i)^{\alpha_i}$ of least order

such that $P(A)(y) = 0$ is a minimal polynomial for y . There exist functions y_1, \dots, y_v such that $y_1 + \dots + y_v = y$ and $(A - p_i)^{\alpha_i}$ is a minimal polynomial for y_i . Also if $(A - p_i)^{\alpha_i}$ ($i = 1, \dots, v$) is a minimal polynomial for y_i then $z = y_1 \dots y_v$ has $(A - p_1 - p_2 - \dots - p_v)^{\alpha_1 + \dots + \alpha_v - v + 1}$ as a minimal polynomial. Also applications of this correspondence are given.

Raudenbush (New Haven).

Zwirner, Giuseppe: La teoria delle matrici applicata ai sistemi di equazioni differenziali lineari. *Rend. Semin. mat. Univ. Padova* 7, 55—109 (1936).

Einige elementare Anwendungen von Volterras Matrizenableitung und -integral auf die Lösung von linearen Differentialgleichungen. Das Theorem 1 vom Verf. (S. 68) ist nicht richtig, was man auch an Beispielen von Matrizen 2. Ordnung zeigen kann.

Janczewski (Leningrad).

Wintner, Aurel: On a statement of Fatou. *J. London Math. Soc.* 11, 245—246 (1936).

La note posthume de Fatou [*C. R. Acad. Sci., Paris* 189, 967 (1929)] contient l'affirmation erronée, notamment que l'équation $x'' + f(t)x = 0$, $a^2 \leq f(t) \leq b^2$, a les solutions bornées; la faute a été signalée par Perron (*Göttinger Nachr.* 1930). L'aut. remarque que les propriétés bien connues de l'équation de Mathieu sont incompatibles avec cette affirmation.

W. Stepanoff (Moskau).

Chazy, Jean: Sur les solutions périodiques d'un système différentiel au voisinage d'une position d'équilibre. *J. Math. pures appl.*, IX. s. 15, 411—421 (1936).

The paper contains remarks about well known topics in the theory of centers as applied to second order systems of differential equations.

D. C. Lewis.

Lurje, A.: Verwendung operationeller Methoden in einigen Problemen der Mechanik. *Trans. Leningrad Industr. Inst., Sect.: Phys. a. Math.* Nr 6, 12—46 u. deutsch. Zusammenfassung 47 (1936) [Russisch].

Die Arbeit stellt in ihrem I. Kapitel die Methode der Heavisideschen Operatorenrechnung dar, im Anschluß an die Begründungen, wie sie von Carson und anderen gegeben wurden. Im II. Kapitel werden einige Anwendungen, und zwar, was früher weniger geschah, aus der Mechanik, behandelt; z. B. Schwingungen einer Masse unter Wirkung einer Federkraft, dann auch statische, wie die Aufgabe der Balkenbiegung auf einer elastischen Unterlage, bei einfacher Form des statischen Ansatzes. — Wer mit der Handhabung der Operatorenrechnung vertraut ist, bestätigt die Lösung

solcher relativ einfacher Aufgaben rasch in einer endgültigen Form. Daß der Methode aber mehr als subjektive Bedeutung zukommt, erscheint dem Ref. doch zweifelhaft.

F. Noether (Tomsch).

Bouligand, Georges: Sur les équations aux dérivées partielles du premier ordre. C. R. Acad. Sci., Paris **203**, 1052—1054 (1936).

Bemerkungen über verschiedene Möglichkeiten, die Integrationsaufgabe der im Titel genannten Gleichungen zu formulieren, etwa: Gesucht eine Fläche, deren Paratingens in jedem Punkte in einer Tangentialebene an den Elementarkegel liegt.

W. Feller (Stockholm).

Müntz, Ch. H.: Funktionale Methoden bei Randwertaufgaben. (Leningrad, Sitzg. v. 24.—30. VII. 1934.) Arb. d. 2. math. Bundestag. Leningrad **1**, 318—337 (1935) [Russisch].

Übersicht einiger Methoden der Lösung linearer Randwertaufgaben. Anfangswertaufgabe für einen unbegrenzten Raum. Reduktion beliebiger Anfangswerte auf Null. Verfahren von Duhamel; Reduktion auf eine „quasistationäre“ Aufgabe (Randwerte unabhängig von der Zeit). Fouriersche Methode. Methoden, die die Lösung explizit als ein lineares Funktional der Randwerte darstellen. Methode der Potentiale — die Bestimmung der Belegung führt zu einer Fredholmschen (stationärer Fall) bzw. zu einer gemischten — in bezug auf die räumlichen Koordinaten Fredholmschen und in bezug auf die Zeit Volterraschen — Integralgleichung (vgl. die Arbeiten des Verf., dies. Zbl. **7**, 67; **8**, 313). Reduktion mittels einer Mellinschen Transformation einer Volterraschen Integralgleichung, deren Kern von der Differenz beider Variablen abhängt, auf eine algebraische Gleichung (Heavisidesche Methode). Analoge Rolle der Fouriertransformation bei einigen Fredholmschen Kernen. Beispiel: Elastische Schwingungen einer Kreisscheibe mit vorgegebenen nichtstationären Randverschiebungen. Fall eines inhomogenen Raumes, Methode der Potentiale. Mehrdimensionale Wärmegleichung.

W. Stepanoff (Moskau).

Lewy, Hans: On the non-vanishing of the Jacobian in certain one-to-one mappings. Bull. Amer. Math. Soc. **42**, 689—692 (1936).

Sind $u(x, y)$, $v(x, y)$ harmonische Funktionen, $u(0, 0) = v(0, 0) = 0$, und wird durch sie eine gewisse Umgebung von $x = 0$, $y = 0$ eindeutig auf eine gewisse Umgebung von $u = 0$, $v = 0$ abgebildet, so ist die Funktionaldeterminante $\frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)}$ im Nullpunkt $\neq 0$. Der Satz wird auf den Fall ausgedehnt, daß u, v Lösungen gewisser allgemeinerer Differentialgleichungen sind.

Kamke (Tübingen).

Maria, Alfred J., and Robert S. Martin: Representation of positive harmonic functions. Duke math. J. **2**, 517—529 (1936).

The authors develop a considerable generalization of the classical Poisson-Stieltjes representation of a harmonic function by means of its "boundary values". For a function $u(p)$ non-negative and harmonic in a bounded region A , this representation assumes the form

$$u(p) = \int_{A^*} f(s, p) d\mu(e_s)$$

where A^* is the boundary of A and f depends only on s in A^* and p in A ; $\mu(e)$ is a non-negative additive function of Borel sets vanishing in the complement of A^* . The integral is taken in the sense of Stieltjes-Radon. The exact formulation of the sufficient conditions for this representation obtained by the authors can not be given in a short review. They are satisfied for a finitely connected Jordan region A . *Szegő.*

● **Nicolesco, Miron:** Les fonctions polyharmoniques. (Coll. actualit. scient. et industr. Nr. 331.) Paris: Hermann & Cie. 1936. 56 pag. Frs. 15.—.

Sobolev, S.: Problème limite fondamental pour les équations polyharmoniques dans un domaine au contour dégénéré. C. R. Acad. Sci. URSS, N. s. **3**, 311—314 (1936).

Verf. betrachtet für $m > \frac{n}{2}$ die polyharmonische Differentialgleichung $\Delta^m u = 0$ in einem n -dimensionalen Gebiete D , dessen Rand S aus den Mannigfaltigkeiten S_{n-1} der Di-

mension $n-s$ besteht: $S = S_{n-1} + S_{n-2} + \dots + S_{n-s} + \dots + S_0$. Auf jedem S_{n-s} werden die Randwerte der Lösung u selbst und die ihrer Ableitungen bis zur Ordnung $m - \left\lfloor \frac{s}{2} \right\rfloor - 1$ als Grenzwerte im Mittel gewisser Integrale vorgeschrieben. Die Lösbarkeit dieses Randwertproblems im Falle seiner Zurückführbarkeit auf die Minimumaufgabe der Variationsrechnung wird behauptet. Die Lösung ist eindeutig bestimmt. *Schauder*.

Einaudi, Renato: Sul campo elettromagnetico emesso da una sorgente puntiforme. Atti Accad. Sci. Torino **71**, 443—451 (1936).

The general integral of $\Delta_2 \mathbf{Z} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{Z}}{\partial t^2} = 0$ belonging to a certain class D can be expressed in the form

$$\mathbf{Z} = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{s=0}^{2n+1} \mathbf{Z}_{ns}$$

where

$$\mathbf{Z}_{ns} = \sum_{m=0}^n \lambda_{nm} r^{m-n-1} \mathbf{F}_{n,s}^{(m)}(ct-r) P_{n,m}(\theta, \Phi),$$

$$\lambda_{n,0} = 1, \quad [n(n+1) - (n-m)(n-m+1)] \lambda_{n,m} = 2(n-m+1) \lambda_{n,m-1}.$$

$\mathbf{F}_{n,s}(x)$ is an arbitrary vector function which can be differentiated $n+3$ times with respect to x and is identically zero for $x < 0$ and for $x > cT$. It is required also to be zero, together with its first $n+2$ derivatives when $x=0$ and when $x=cT$. — Electromagnetic fields derived from Hertzian vectors of types \mathbf{Z} and \mathbf{Z}_{ns} are considered and their usefulness pointed out.

H. Bateman (Pasadena).

Spezielle Funktionen:

Kober, H.: Nullstellen Epsteinscher Zetafunktionen. Proc. London Math. Soc., II. s. **42**, 1—8 (1936).

The author proves that $\sum_{m,n} (am^2 + bmn + cn^2)^{-s}$, $s = \sigma + it$,

has an infinity of zeros on the line $\sigma = \frac{1}{2}$ in some cases left aside by Potter and Titchmarsh, see this Zbl. **11**, 391.

E. C. Titchmarsh (Oxford).

Duffahel, Maurice de: A reduction-formula for the functions of the second kind connected with the polynomials of applied mathematics. Bull. Calcutta Math. Soc. **27**, 147—156 (1935).

Let $f_{n-1}(x)$ be the "integral part" of the development of $\frac{1}{2} P_n(x) \log \frac{x+1}{x-1}$ in descending powers of x . Here $P_n(x)$ is Legendre's polynomial of degree n . Then determining the polynomials $A_n(x)$ and $B_n(x)$ of degree $n-2$ and $n-1$ respectively such that $A_n P_n + B_n P'_n = 1$, we have $(x^2-1) f_{n-1}(x) = x P_n(x) - B_n(x)$. The author derives the analog of this formula for various special functions occurring in the mathematical physics, like Lamé functions, ultraspherical, and Laguerre polynomials.

G. Szegö (St. Louis, Mo.).

Duffahel, Maurice de: On Appell's function $P(\theta, \Phi)$. Bull. Calcutta Math. Soc. **27**, 215—218 (1935).

Denoting by $P(\alpha, \beta)$ the function $\frac{1}{3}(e^{\alpha+\beta} + e^{\varepsilon\alpha} + \bar{\varepsilon}\beta + e^{\bar{\varepsilon}\alpha} + \varepsilon\beta)$ where $\varepsilon^3=1$, $\varepsilon \neq 1$ [Appell, C. R. Acad. Sci., Paris **84**, 540 (1887)], the author shows that

$$-\log\{1 - 3zP(\alpha, \beta) + 3z^2P(-\alpha, -\beta) - z^3\} = \sum_{n=1}^{\infty} 3z^n \frac{P(n\alpha, n\beta)}{n}.$$

This is an analog of the classical generating function of Tchebycheff polynomials.

G. Szegö (St. Louis, Mo.).

Coulomb, Jean: Sur les zéros des fonctions de Bessel considérées comme fonction de l'ordre. Bull. Sci. math., II. s. **60**, 297—302 (1936).

Der Verf. betrachtet die Eigenschaften der Nullstellen der Besselschen Funk-

tion $J_\nu(z)$ als Funktion der Ordnung ν (also z konstant). Aus der allgemeingültigen Reihenentwicklung

$$J_\nu(z) = \frac{\left(\frac{z}{2}\right)^\nu}{\Gamma(\nu+1)} \left\{ 1 + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^m \left(\frac{z}{2}\right)^{2m}}{m!(\nu+1)(\nu+2)\dots(\nu+m)} \right\}$$

folgt sogleich, daß die Nullstellen ν_0 für große Werte von $|\nu| \infty -m$ sind (m ist eine ganze positive Zahl). Der Verf. zeigt, daß für $z = x$ reell >0 :

1. $J_{\nu_0}(x) \neq 0$ für ν_0 komplex mit $R(\nu_0) > 0$
2. $J_{\nu_0}(x) \neq 0$ „ „ „ „ $R(\nu_0) < 0$ (Beweis unvollständig!)
3. $J_{\nu_0}(x) \neq 0$ „ „ „ „ $R(\nu_0) = 0$.

Es folgt also, daß alle Nullstellen ν_0 reell sind. Weiter wird gezeigt, daß sie auch einfach sind. Wenn für die beiden Nullstellen ν_1 und ν_2 gilt:

$$\nu_1 \infty -m_1, \nu_2 \infty -m_2 \quad (m_1 \text{ und } m_2 \text{ ganz } >0) \text{ mit } \nu_2 < \nu_1,$$

so findet der Verf.: $\nu_1 < -m_1$; $\nu_2 < -m_2$ und $m_1 - \nu_1 < m_2 - \nu_2 < 0$. Für $z = iy$

($y > 0$) findet er für $I_\nu(y) = e^{-\frac{\nu\pi i}{2}} J_\nu(iy)$:

$$I_\nu(y) > 0 \text{ für } \nu \text{ reell } \geq -1.$$

$$I_{\nu_0}(y) \neq 0 \text{ „ } \nu_0 \text{ komplex mit } R(\nu_0) \geq -\frac{3}{2}.$$

Für ν reell <0 zeigt er, daß (für $|\nu|$ groß genug) jedes Intervall $\sin \nu\pi > 0$ genau zwei Nullstellen enthält, welche sich für $|\nu| \rightarrow \infty$ den beiden Enden des Intervalles monoton nähern.

S. C. van Veen (Dordrecht).

Hall, N. A.: A new class of functions of two variables involving Bessel functions of half an odd integer. Bull. Amer. Math. Soc. 42, 695—698 (1936).

Ist $u = \alpha(1+x^2)^{1/2} - \beta x$, so werden Eigenschaften der Funktionen von α und β untersucht, die als Koeffizienten in den Entwicklungen von $\sin u$, $\cos u$, $\exp \pm iu$ nach Potenzen von x auftreten. Insbesondere wird eine Darstellung dieser Funktionen als Polynome in Besselschen Funktionen halbganzzahliger Ordnung sowie als Konturintegrale gegeben.

E. Rothe (Breslau).

Watson, G. N.: A note on parabolic cylinder functions. J. London Math. Soc. 11, 250—251 (1936).

The author gives the extension to non-integral values of n of the well-known formula

$$\int_0^\infty D_n^2(x) dx = n! \sqrt{\left(\frac{1}{2}\pi\right)}.$$

This extension is

$$\int_0^\infty D_n^2(x) dx = \frac{\Gamma(n+1)}{2\sqrt{(2\pi)}} [2\pi + \{\psi(1+\frac{1}{2}n) - \psi(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}n)\} \sin n\pi],$$

where $\psi(z)$ denotes the logarithmic derivative of the gamma function. W. N. Bailey.

Mitra, S. C.: An integral equation satisfied by the square of Weber's parabolic cylinder function. J. London Math. Soc. 11, 252—256 (1936).

It is shown, by means of differential equations, that the square of Weber's parabolic cylinder function $D_{2m+1}(x)$, where m is a non-negative integer, satisfies the integral equation

$$D_{2m+1}^2(x) = x \int_0^\infty J_1(xz) D_{2m+1}^2(z) dz. \quad W. N. Bailey.$$

Watson, G. N.: An integral equation for the square of a Laguerre polynomial. J. London Math. Soc. 11, 256—261 (1936).

In this paper it is shown that the square of Laguerre's polynomial $L_n^{(\alpha)}(x)$ satisfies the integral equation

$$e^{-x} x^\alpha \{L_n^{(\alpha)}(x)\}^2 = \int_0^\infty J_{2\alpha}\{2\sqrt{xy}\} e^{-y} y^\alpha \{L_n^{(\alpha)}(y)\}^2 dy.$$

Two methods are given, neither involving the use of differential equations. The result expresses the fact that the function

$$e^{-\frac{1}{2}x^2} x^{2\alpha+\frac{1}{2}} \{L_n^{(\alpha)}(\frac{1}{2}x^2)\}^2$$

is self-reciprocal in the Hankel transform of order 2α , where $R(\alpha) > -\frac{1}{2}$. When $\alpha = \frac{1}{2}$, Mitra's result given in the previous paper (above) is obtained. It is shown that the corresponding result for $D_{2m}^2(x)$ is

$$D_{2m}^2(x) = \left(\frac{2^m \Gamma(m + \frac{1}{2})^2}{\Gamma(\frac{1}{2})} \right) - x \int_0^\infty J_1(xy) D_{2m}^2(y) dy.$$

W. N. Bailey (Manchester).

Varma, R. S.: Some functions which are self-reciprocal in the Hankel-transform. Proc. London Math. Soc., II. s. 42, 9—17 (1936).

In this paper it is shown that the functions $x^\nu + \frac{1}{2}e^{\frac{1}{2}x^2} D_{-2\nu-3}(x)$ and $x^\nu - \frac{1}{2}e^{\frac{1}{2}x^2} D_{-2\nu}(x)$ are self-reciprocal in the Hankel transform of order ν , the function $D_n(x)$ being the parabolic cylinder function. An operational image for Sonine's polynomial $T_m^n(x)$ is then given, and the integral $\int_0^\infty x^s e^{-\frac{1}{2}x^2} T_m^n(x^2) dx$

is evaluated. This integral is used to prove the known result that the function $x^\nu + \frac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}x^2} T_\nu^n(x^2)$ is self-reciprocal when n is even, and skew-reciprocal when n is odd.

W. N. Bailey (Manchester).

Integralgleichungen, Funktionalanalysis:

Günther, N. M.: Stieltjes-Integrale in der mathematischen Physik und in der Theorie der Integralgleichungen. (Leningrad, Sitzg. v. 24.—30. VII. 1934.) Arb. d. 2. math. Bundestag. Leningrad 1, 271—317 (1935) [Russisch].

This paper is a survey of all the previous work of the author on the subject stated in the above title. The proofs are in most cases omitted. J. D. Tamarkin.

Jančevskij, S.: Sur l'équation complexe de Fredholm. I. et II. C. R. Acad. Sci. URSS, N. s. 3, 255—259 (1936).

Statements of results (without proofs) concerning the representation of solutions of integral equations of the types $y(z) - f(z) = (I)$, (II) , (III) , (IV) where

$$\begin{aligned} (I) &= \lambda \int_C K(z, t) y(t) dt, & (II) &= \lambda \int_C K(z, t) y(t) |dt|, \\ (III) &= \lambda \int_C K(z, \bar{t}) y(t) |dt|, & (IV) &= \lambda \int_C K(z, \bar{t}) \overline{y(t)} |dt| \end{aligned}$$

where C is a given rectifiable curve, f and K are given analytic functions with K single- or many-valued.

J. D. Tamarkin (Providence, R. I.).

Smirnov, N. S.: Existenztheorem der nichtlinearen Integralgleichungen. C. R. Acad. Sci. URSS, N. s. 3, 203—206 (1936).

Hilfssatz: Der Operator $N(u) = \sum_{i=0}^\infty \int_{G_i} K_i[x, y_1, \dots, y_i, u(y_1), \dots, u(y_i)] d\tau_i$ ist für (1) $\int_0^1 u^2(x) dx \leq C$ im Hilbertschen Raume H kompakt, falls

$$\sum_{i=0}^\infty \left\{ \int_0^1 \int_{G_i} K_i^2 d\tau_i dx \right\}^{\frac{1}{2}} \leq A \quad (2)$$

für Funktionen (1). Die weiteren Voraussetzungen, nämlich die Lipschitzbedingung für $N(u)$, welche uns die Stetigkeit dieses Operators verbürgt (die Stetigkeit aller K_i würde übrigens dasselbe leisten) und die Ungleichheit $A^2 \leq C$ sind so angepaßt, daß sie die Anwendung des Fixpunktsatzes ermöglichen, woraus die Existenz des Fixpunktes für $N(u)$ folgt. Ergebnisse obiger Art könnte man auch (ohne Benutzung des Kolmogoroffschen Hilfssatzes) für andere Räume, z. B. Räume $L^{(p)}$, beweisen.

Schauder (Lwów).

Hodge, W. V. D.: The existence theorem for harmonic integrals. Proc. London Math. Soc., II. s. 41, 483—496 (1936).

Acting on a suggestion of H. Kneser the author applies the method of the parametrix of Hilbert in the theory of integral equations, in order to re-derive his own results on the existence of harmonic integrals on an analytic variety M having assigned periods. The outcome is a considerable improvement on the proofs given by the author in previous papers (see this Zbl. 8, 22, 103; 10, 376). — The existence proof is made to depend upon the discussion of the solution of an integral equation of the form $u(x) + \lambda \int K(x, y) u(y) = \Phi(x)$, involving differential forms of several variables, of certain degrees and satisfying certain conditions. Especially $K(x, y)$ (the parametrix) is a double form in the two sets of variables x and y , defined everywhere on M , except at $x = y$, where it may become infinite to a certain specified order. In the application to the existence proof a form K is used which is defined in terms of the distance (x, y) and which, suggested by Kneser, generalizes a symbol used by the author in previous papers.

O. Zariski (Baltimore).

Krull, Wolfgang: Linearformenmoduln und lineare Gleichungssysteme in unendlich vielen Variablen über einem diskret bewerteten, perfekten Körper. II. Mh. Math. Phys. 44, 113—114 (1936).

Die für Gleichungssysteme mit abzählbar vielen Unbekannten in Teil I (dies. Zbl. 13, 343) erhaltenen Ergebnisse werden auf solche mit mehr als abzählbar vielen Unbekannten verallgemeinert.

G. Köthe (Münster i. W.).

Krull, Wolfgang: Linearformenmoduln und lineare Gleichungssysteme in unendlich vielen Variablen über einem diskret bewerteten, perfekten Körper. III. Mh. Math. Phys. 44, 321—325 (1936).

Beispiele von unendlichen Gleichungssystemen in nicht diskret bewerteten perfekten Körpern, die zeigen, daß die vom Verf. früher gefundenen (vgl. vorst. Ref.) einfachen Auflösungsatsachen wesentlich auf der Diskretheit der Bewertung beruhen.

Köthe (Münster i. W.).

Pincherle †, Salvatore: Sulla permutabilità negli operatori lineari. Boll. Un. Mat. Ital. 15, 153—161 (1936).

In dieser Arbeit werden die Grundbegriffe einer Theorie der Permutabilität der linearen Operatoren aufgestellt. Wenn A und B zwei Operatoren sind, so nennt man den Operator $B' = AB - BA$ „Abweichung von B von der Permutabilität“. Abweichung 2. Ordnung heißt $B'' = (AB - BA)' = A^2B - 2ABA + BA^2$ und im allgemeinen die Abweichung m -ter Ordnung $B^{(m)} = AB^{(m-1)} - B^{(m-1)}A$. Man nennt den Operator B m -ter Ordnung vertauschbar in bezug auf A , wenn seine m -te Abweichung gleich Null ist. Der Abweichungsbegriff hat wichtige algorithmische Eigenschaften, analog denen der Differentiation. Einen Operator B , welcher der Gleichung $AB + BA = 0$ genügt, bezeichnet man als „halb vertauschbar“ (semi-permutable) mit A ; man sieht, daß B mit dem Quadrat von A vertauschbar ist. Der Verf. wendet die obigen allgemeinen Definitionen auf die Operatoren A, M an, die durch die Matrizen

$$A = \begin{vmatrix} h_0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & h_1 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & h_2 & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{vmatrix}, \quad M = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{vmatrix}$$

bestimmt sind. Man hat so $A\varepsilon_n = h_n\varepsilon_n$, $M\varepsilon_n = \varepsilon_{n+1}$, wenn $\varepsilon_0, \varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n, \dots$ die Einheitsvektoren des betreffenden Raumes sind.

G. Lampariello (Rom).

Kantorovič, L.: Allgemeine Formen gewisser Klassen von linearen Operationen. C. R. Acad. Sci. URSS, N. s. 3, 101—106 (1936).

Die Sätze über die Form eines linearen Funktionalen in den Räumen $l^{(p)}$ bzw. $L^{(p)}$ bei $p \geq 1$ können auf lineare Operationen verallgemeinert werden. Insbesondere bekommt Verf. Sätze über die allgemeine Gestalt einer linearen Funktionaloperation

$y = U(x)$, falls sich y in einem beliebigen Raume Y vom Typus B_2 (oder B usw.) bewegt und als der x -Raum einer der klassischen Räume $l^{(p)}$, $L^{(p)}$, \tilde{M} usw. angenommen wird. Schauder (Lwów).

Leray, Jean: *Les problèmes non linéaires.* (*Conférences internat. sur les équations aux dérivées partielles, Genève, 17.—20. VI. 1935.*) Enseignement Math. **35**, 139—151 (1936).

Verf. bespricht die neueren Ergebnisse aus der Topologie in linearen normierten und vollständigen Räumen und ihre Anwendungen. Grundlegend für diese Untersuchungen ist der Begriff des Abbildungsgrades, der sich für eine Klasse von Funktionaloperationen der Gestalt $y = x + F(x)$ mit vollstetigem $F(x)$ definieren läßt. Aus dieser Theorie (die auch nichtlineare Integralgleichungen umfaßt) ergeben sich Anwendungen auf Randwertaufgaben der nichtlinearen partiellen elliptischen Differentialgleichungen und die der zähen Flüssigkeiten. Die Methode der a priori-Abschätzung erweist sich als ein topologischer Satz in Funktionalräumen, der die Eindeutigkeit im allgemeinen nicht erfordert. Schauder (Lwów).

Funktionentheorie:

Whittaker, J. M.: A mean value theorem for analytic functions. Proc. London Math. Soc., II. s. **42**, 186—195 (1936).

The main idea is that, if an analytic function $f(s)$ possesses the degree of smoothness on vertical lines indicated by the existence of

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T |f(\sigma + it)|^2 dt$$

for $a < \sigma < b$, then its modulus exceeds a fixed bound on certain horizontal lines, i. e.

$$|f(\sigma + it)| \geq L(\delta) \quad (a + \delta \leq \sigma \leq b - \delta)$$

for certain arbitrarily large values of t . The theorem is used to obtain results for the Riemann zeta-function complementary to those of the author's previous paper, Proc. London Math. Soc. (2) **41**, 544—552 (1936), see this Zbl. **15**, 69. E. C. Titchmarsh.

Srivastava, P. L.: On the Phragmén-Lindelöf principle. Proc. Nat. Acad. Sci. India **6**, 241—243 (1936).

L'auteur énonce le théorème suivant qui est une conséquence simple de la théorie de Lindelöf et Phragmén [Acta math. **31** (1908)]: Soit $f(z)$ une fonction holomorphe de $z = re^{i\varphi}$ dans l'angle $|\varphi| < \frac{\pi}{\varrho}$ ($\varrho \geq 1$), Posons

$$h(\varphi) = \lim_{r=\infty} \frac{\log |f(re^{i\varphi})|}{r^\varrho}$$

et supposons que $f(z)$ est d'ordre fini dans l'angle donné. Si $h(\varphi) \leq A$ pour tous les φ , $|\varphi| < \frac{\pi}{\varrho}$, et si pour une valeur de φ , $h(\varphi) < -A$, $f(z)$ est identiquement nulle.

L'auteur donne diverses applications et extensions contenant un résultat de Akhyeser (Rend. Circ. mat. Palermo **1927**). [Son résultat s'étend à toutes les fonctions d'ordre fini en introduisant un ordre précisé; pour $0 < \varrho < 1$, le résultat vaut pour des fonctions multiformes (comp. V. Bernstein). (Note du Réf.)] G. Valiron (Paris).

Ganapathy Iyer, V.: A note on integral functions of order 2 bounded at the lattice points. J. London Math. Soc. **11**, 247—249 (1936).

L'auteur complète des résultats dus à Whittaker (Proc. Edinburgh Math. Soc. **1930**, 112), Pólya (Jber. Deutsch. Math.-Verein. **1934**, 67), et Whittaker (voir ce Zbl. **9**, 216). En utilisant la formule d'interpolation de Whittaker (premier mémoire cité) et le résultat de Pólya, il prouve que: Si $f(z)$ est une fonction entière d'ordre 2, $M(r, f) = \max. |f(z)|$ pour $|z| = r$, et si

$$\lim_{r=\infty} \frac{\log M(r, f)}{r^2} < \frac{\pi}{2}$$

tandis que $|f(m + in)| < A$, quels que soient les entiers m et n , $f(z)$ est une constante.

G. Valiron (Paris).

Pennycuik, K.: On level curves of integral functions. J. London Math. Soc. 11, 281—285 (1936).

L'auteur démontre ces deux théorèmes: I. Si $f(z)$ est une fonction entière d'ordre $\rho < 1/2$, il existe une suite de courbes fermées simples entourant l'origine, C_n ($n = 1, 2, \dots$), telles que sur chaque C_n , $|f(z)| = M_n$, avec $r_n \leq |z| \leq R_n$, $\frac{\log R_n}{\log r_n} \rightarrow 1$ (*), $r_n \rightarrow \infty$. II. Si $f(z)$ est une fonction entière d'ordre ρ entier, et si $f(z)$ ne prend pas la valeur α , les courbes de niveau pour lesquelles $|f(z)| = M$ sont ouvertes si $M \geq |\alpha|$, et se ferment à distance finie si $M < |\alpha|$. La proposition I est une conséquence du théorème de Wiman. Si l'on utilise ce th. sous la forme précise $\log |f(z)| > (1 - \varepsilon) r^{\rho(r)} \cos \pi \rho$, pour une suite de $r = |z|$ tendant vers l'infini, $\rho(r)$ étant un ordre précisé, on peut remplacer (*)

par $\lim_{r_n} \frac{R_n}{r_n} \leq (\cos \pi \rho)^{-\frac{1}{\varepsilon}}$. (Note du Réf.)] La proposition II se déduit de l'étude des

courbes de niveau de $e^w + \alpha$ et de la transformation $w = g(z)$, où $g(z)$ est un polynôme. L'aut. observe aussi que la première partie de II ($M \geq |\alpha|$) reste vraie pour l'ordre infini et que la seconde partie ($M < |\alpha|$) reste vraie pour $e^{g(z)} + \alpha$ si $g(z)$ est d'ordre inférieur à $1/2$. [D'une façon générale, il suffit que $g(z)$ n'ait pas de valeur asymptotique finie, tandis que si $g(z)$ admet a pour valeur asymptotique, la seconde partie de II n'est plus vraie si $\alpha = -e^a$.] L'aut. signale enfin cette intéressante proposition, suggérée par J. M. Whittaker: Si deux fonctions entières $f(z)$ et $g(z)$ ont une ligne de niveau commune, toutes leurs lignes de niveau coïncident. Valiron.

Cartwright, M. L.: On the asymptotic values of functions with a non-enumerable set of essential singularities. J. London Math. Soc. 11, 303—306 (1936).

Comme complément à des résultats antérieurs (voir ce Zbl. 13, 69), l'aut. démontre ceci: Si $f(z)$ est méromorphe dans un domaine ouvert simplement connexe D , sauf en un ensemble de singularités essentielles de mesure logarithmique nulle, et si $f(z)$ ne prend pas une valeur a dans le voisinage de l'une de ces singularités, Z , pour chaque $\delta > 0$, $f(z) \rightarrow a$ lorsque z tend, par un chemin continu, vers une singularité appartenant au cercle $|z - Z| < \delta$. La démonstration repose sur cette généralisation du théorème sur le module maximum: Si $f(z)$ est holomorphe dans un domaine fini D , si $|f(z)| < 1$ dans D et si, si petit que soit $\varepsilon > 0$, $|f(z)| < m + \varepsilon$ ($m < 1$), dans le voisinage de chaque point de la frontière sauf au plus en des points formant un ensemble de mesure logarithmique nulle, on a $|f(z)| \leq m$ dans D . L'aut. rapproche ses résultats de ceux connus par Nevanlinna (Eindeutige analytische Funktionen, voir ce Zbl. 14, 163) et Seidel (voir ce Zbl. 8, 363), qui concernaient l'ensemble des valeurs exceptionnelles dans le voisinage de singularités essentielles de mesure logarithmique nulle. Valiron.

Behnke, H.: Zur Theorie der analytischen Funktionen mehrerer komplexer Veränderlichen. Der Kontinuitätssatz und die Regulärkonvexität. Math. Ann. 113, 392 bis 397 (1936).

Verf. beweist den folgenden Satz: \mathfrak{F} sowie \mathfrak{F}_κ , $\kappa = 1, 2, \dots$, mit den Rändern \mathbb{C} bzw. \mathbb{C}_κ seien abgeschlossene Teile ergänzter analytischer Flächenstücke. Die \mathfrak{F}_m mögen gegen \mathfrak{F} konvergieren. $g(z_1, \dots, z_n)$ sei regulär auf \mathbb{C} und bleibe bei jeder Fortsetzung innerhalb einer $2n$ -dimensionalen Nachbarschaft von \mathfrak{F} eindeutig. Weist nun g mindestens eine Singularität auf \mathfrak{F} auf, so gibt es ein m_0 , so daß gleiches für die \mathfrak{F}_m , $m > m_0$, gilt. — Dieser Satz bleibt richtig, wie der Verf. zeigt, wenn man in ihm „regulär“ durch „meromorph“ und „Singularität“ durch „wesentliche Singularität“ ersetzt und über g die zusätzliche Voraussetzung macht, daß entweder der Meromorphiebereich von g meromorph-konvex ist oder, daß g sich in einem geeigneten Bereiche in der Form g_1/g_2 darstellen läßt, wo g_1, g_2 regulär sind. — Die Sätze bilden

eine Verallgemeinerung der Sätze von Hartogs, E. E. Levi, H. Kneser über Kontinuität der Singularitäten bzw. wesentlichen Singularitäten, wo Analoges für den Fall, daß \mathfrak{F}_m Teile analytischer Ebenen sind, bewiesen wurde und wo weitere zuzätzliche Voraussetzungen gemacht wurden. — Der Beweis des ersten Satzes beruht darauf, daß, falls g in allen \mathfrak{F}_m regulär, in einem Punkte R von \mathfrak{F} singular wäre, R ein Randpunkt des Regularitätsbereiches von g wäre. Auf Grund der Sätze über die Regularitätsbereiche ließe sich eine Funktion h konstruieren, die das Maximum ihres Betrages bezüglich \mathfrak{F}_m (m genügend groß) im „Innern“ von \mathfrak{F}_m annehmen würde, was unmöglich ist. — Bei der Betrachtung der meromorphen Funktionen stützt sich der Verf. auf seinen Satz, daß man jeden meromorph-konvexen Bereich durch Regularitätsbereiche approximieren kann. *Stefan Bergmann* (Tbilissi-Tiflis).

Ghika, Alexandre: Sur le développement en série de fonctions orthogonales, des fonctions analytiques de deux variables complexes. C. R. Acad. Sci., Paris 203, 528 bis 530 (1936).

Ghika, Alexandre: Sur le développement en série des fonctions holomorphes de deux variables complexes. Bull. Math. Soc. Roum. Sci. 38, H. 1, 21—37 (1936).

Let $f(z, z')$ be analytic in D, D' where the regions D, D' of the z - and z' -plane are bounded by a finite number of rectifiable curves C, C' respectively. Let

$$\int_C \int_{C'} |f(z, z')|^2 |dz| |dz'|$$

exist; let the integral

$$\iint_{C \times C'} \frac{f(z, z')}{(z-x)(z'-x')} dz dz'$$

vanish if x or x' lie in the "exterior" of C respectively C' and let be $= -4\pi^2 f(x, x')$ if x and x' belong to D and D' respectively. Then a development of the type

$$f(x, x') = \sum f_{mn} \varphi_m(x) \psi_n(x')$$

exists where $\{\varphi_m(x)\}$ and $\{\psi_n(x')\}$ are systems of rational functions defined by certain orthogonality conditions on C and C' (cf. the earlier note of the author: C. R. Acad. Sci., Paris 202, 278; this Zbl. 13, 256). This development is convergent in the mean on C, C' and convergent in the ordinary sense if x, x' is interior to D, D' . *G. Szegő*.

Wahrscheinlichkeitsrechnung, Statistik, Versicherungsmathematik:

Borel, Émile: Sur le problème des partis. C. R. Acad. Sci., Paris 203, 1110—1113 (1936).

„Le problème des partis de Pascal consiste à calculer la valeur du parti d'un joueur, c'est-à-dire la fraction des mises qui doit lui revenir équitablement, lorsque le jeu est interrompu.“ L'auteur considère le cas d'un jeu se jouant en $n + p + 1$ points; à chaque coup, il y a des probabilités déterminées pour le joueur A (resp. B) de gagner $1, 2, \dots, \kappa$ (resp. $1, 2, \dots, \kappa'$) points. Dans ces conditions l'auteur établit des formules exactes donnant les partis de A et de B , en supposant qu'ils ont obtenu $p + 1$ et n points respectivement; les calculs se réduisent au fond à l'évaluation des coefficients du développement taylorien d'une fonction rationnelle. *A. Khintchine*.

Regan, Francis: A note on a preceding paper. Bull. Amer. Math. Soc. 42, 681 bis 684 (1936).

Ergänzungen zu einem früheren Artikel des Verf. [Bull. Amer. Math. Soc. 36, 517 (1934); dies. Zbl. 10, 72]. Insbesondere beweist jetzt Verf. mit seinen Methoden einen Satz über die geometrischen Wahrscheinlichkeiten, welcher einem Satz der Copelandschen Theorie [vgl. J. of Math. 50, 555 (1928), Satz 16] entspricht.

A. Kolmogoroff (Moskau).

Bochner, S.: A converse of Poisson's theorem in the theory of probability. Ann. of Math., II. s. 37, 816—822 (1936).

Man denke sich eine Reihe von N Versuchen angestellt, bei welchen von jedem ein gewisses Ereignis E eintritt oder nicht eintritt; die Wahrscheinlichkeit p_r von E

beim ν -ten Versuch wird als zufällige Größe betrachtet; die p_ν mit verschiedenen ν sind gegenseitig unabhängig und unterliegen sämtlich demselben Verteilungsgesetz $F(p)$; es wird vorausgesetzt, daß n/N , wo n die Anzahl der „günstigen“ unter den ersten N Versuchen bedeutet, bei $N \rightarrow \infty$ gegen einen bestimmten Grenzwert t ($0 \leq t \leq 1$) konvergiert, und es wird nach der dadurch bedingten Grenzverteilung von $\left(\sum_{\nu=1}^N p_\nu \right) / N$ gefragt. Es ergibt sich leicht, daß diese Grenzverteilung $\Phi(p)$ stets eine „scharfe“ ist, d. h. $\Phi(p) = 0$ ($p < p_0$) $\Phi(p) = 1$ ($p > p_0$); die Hauptaufgabe bildet danach die Aufstellung von p_0 als Funktion von t . Unter sehr allgemeinen Voraussetzungen über die Natur von $F(p)$ beweist Verf. die unerwartet einfache Formel

$$p_0 = e_0 + \frac{\delta}{e_0(1-e_0)}(t - e_0),$$

wo e_0 den Mittelwert und δ die Streuung von $F(p)$ bedeutet. Die benutzte analytische Methode erlaubt darüber hinaus gewisse Abschätzungen des Restglieds zu erzielen.

A. Khintchine (Moskau).

Khintchine, A.: Su una legge dei grandi numeri generalizzata. Giorn. Ist. Ital. Attuari 7, 365—377 (1936).

x_k seien unabhängige nichtnegative stochastische Veränderliche mit derselben stetigen Verteilungsfunktion $F(x)$, und es werde $s_n = x_1 + \dots + x_n$ gesetzt. Es wird eine notwendige und hinreichende Bedingung dafür angegeben, daß es eine monotone Funktion $f(n)$ gibt, mit welcher $\lim P \left\{ \left| \frac{s_n}{nf(n)} - 1 \right| > \varepsilon \right\} = 0$ wird. Das Analogon des

stärken Gesetzes der großen Zahlen, d. h. $\lim \frac{s_n}{nf(n)} = 1$, gilt bei unendlichem ersten Moment nicht.

W. Feller (Stockholm).

Schulz, Günther: Grenzwertsätze für die Wahrscheinlichkeiten verketteter Ereignisse. Deutsche Math. 1, 665—699 (1936).

Verf. betrachtet gewöhnliche Markoffsche Ketten unter der sogenannten Regularitätsbedingung (die Übergangswahrscheinlichkeiten $P_{ik}^{(n)}$ konvergieren gegen die von i unabhängigen Limites P_k). Es sei jedem möglichen Zustand E_i eine reelle Zahl a_i zugeordnet. Verf. untersucht wie üblich, die Verteilungen der Summen $S^{(n)}$ von Zahlen a_i , welche den Ergebnissen der ersten n verketteten Versuchen entsprechen. Das erste Resultat des Verf., daß die Verteilungsfunktionen $W_n(x)$ der Summen $S^{(n)}$ asymptotisch der Gaußschen sind, wurde schon früher unter denselben Bedingungen bewiesen [vgl. etwa V. Romanovsky, Recherches sur les chaînes de Markoff. Acta math. 66 (1936); dies. Zbl. 14, 28]. Verf. beweist weiter, daß im Falle ganzer a_i , unter gewissen allgemeinen Bedingungen, für die Wahrscheinlichkeiten $w_n(x)$ der Gleichungen $S^{(n)} = x$ die „lokale“ asymptotische Formel

$$w_n(x) \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi nm^{(2)}}} e^{-\frac{(x-na)^2}{2nm^{(2)}}}$$

gilt [vgl. die Voranzeige des Verf. Ber. Intern. Math.-Kongr. Zürich 2, 230—231 (1932)]. Neu ist die Behandlung des „Aufteilungsproblems“, d. h. der Frage nach der Wahrscheinlichkeit $w_n(x_1, x_2, \dots, x_k)$ in den ersten n Versuchen x_1 - bzw. x_2 , ... bzw. x_k -mal den Zustand E_1 bzw. E_2 , ... bzw. E_k zu erhalten. Die entsprechende Verteilungsfunktion

$$W_n(x_1, x_2, \dots, x_k) = \sum_{t_1=0}^{x_1} \sum_{t_2=0}^{x_2} \dots \sum_{t_k=0}^{x_k} w_n(t_1, t_2, \dots, t_k),$$

welche eigentlich $k-1$ -dimensional ist ($x_1 + x_2 + \dots + x_k = n$), konvergiert bei einer entsprechenden Normierung gegen eine $k-1$ -dimensionale Gaußsche Verteilung. Ob auch eine „lokale“ asymptotische Formel für $w_n(x_1, x_2, \dots, x_k)$ existiert, bleibt unentschieden.

A. Kolmogoroff (Moskau).

Cramér, H., and H. Wold: Some theorems on distribution functions. J. London Math. Soc. 11, 290—294 (1936).

Es sei $F(E)$ eine Verteilungsfunktion (Vf.) im n -dimensionalen Euklidischen Raum R_n , d. h. eine absolut additive, nichtnegative und für alle B -meßbaren Mengen definierte Mengenfunktion mit $F(R_n) = 1$. Jedem solchen F werde eine Vf. G in R_1 zugeordnet: Ist s eine B -meßbare Menge in R_1 und $(t_1, \dots, t_n) \neq (0, \dots, 0)$ ein fester Punkt, so bezeichne S_t die Menge der Punkte x , für welche $t_1 x_1 + \dots + t_n x_n$ der Menge s angehört, und es werde $G(s) = F(S_t)$ gesetzt. Durch diese Zuordnung werden verschiedene Sätze in R_n auf solche in R_1 zurückgeführt. Hier wird u. a. bewiesen: I. Nehmen zwei Vf. auf allen Halbebenen gleiche Werte an, so sind sie identisch. II. Es werde $\mu_{p_1 \dots p_n} = \int_{R_n} x_1^{p_1} \dots x_n^{p_n} dF$ und $\lambda_k = \mu_{k0 \dots 0} + \dots + \mu_{0 \dots 0k}$ gesetzt; wenn

$\sum \lambda_k^{-1/2k}$ divergiert, so wird F durch die Momente μ eindeutig bestimmt. III. Die n -dimensionale Verallgemeinerung des P. Lévy'schen Satzes, welcher die Konvergenz einer Folge von Vf. mit derjenigen der zugeordneten charakteristischen Funktionen in Zusammenhang bringt. W. Feller (Stockholm).

Keller, Leo: Über die Ausdehnung der Grenzwertsätze der Wahrscheinlichkeitsrechnung auf Integrale und Mittelwerte von Funktionen eines stetigen Argumentes. Trans. Centr. Geophys. Observ. 4, 5—18 u. deutsch. Zusammenfassung 19—20 (1935) [Russisch].

Ein Beitrag zur Theorie von Werteverteilungen reeller Funktionen, welcher jedoch ohne Kenntnis der ganzen Literatur des Gegenstandes abgefaßt ist. Ob die Bedingungen des Hauptsatzes des Verf. hinreichend sind, scheint dem Ref. zweifelhaft.

A. Kolmogoroff (Moskau).

McCrea, W. H.: A problem on random paths. Math. Gaz. 20, 311—317 (1936).

Verf. löst das Irrfahrtsproblem in einem quadratischen Gitter, wobei jedoch nur Bereiche betrachtet werden, die höchstens zwei Gitterpunktreihen enthalten. Die Arbeit von Courant-Friedrichs-Lewy [Math. Ann. 100 (1928)] scheint Verf. entgangen zu sein.

W. Feller (Stockholm).

Eyraud, Henri: Les principes de la mesure des corrélations. Ann. Univ. Lyon, Sect. A, Sci. Math. et Astron., III. s. Fasc. 1, 30—47 (1936).

Verf. untersucht die Korrelationen zwischen zufälligen Größen A, B, C, \dots , die nicht notwendig durch Zahlangaben (Koordinaten u. dgl.) charakterisierbar sind, und stellt Relationen zwischen der Verteilung dieser Größen und den Maßzahlen der Korrelationen auf. Für den Fall stetiger Verteilung werden Reihenentwicklungen einiger dieser Maßzahlen mittels Legendrescher Polynome angegeben. W. Simonsen.

Waerden, B. L. van der: Messung von Wahrscheinlichkeiten, insbesondere Mortalität von Krankheiten, Operationen usw. Ber. Verh. sächs. Akad. Leipzig 88, 21—30 (1936).

Elementare Berechnungen und Abschätzungen betreffend die „Umkehrung“ des Bernoullischen Satzes, insbesondere bei kleiner Versuchszahl. Khintchine (Moskau).

Bonferroni, C. E.: Sistemi aggregativi di leggi di sopravvivenza. Giorn. Ist. Ital. Attuari 7, 351—364 (1936).

Verf. versteht unter einem System von Überlebensgesetzen eine Funktion $f(x, t)$, die die Anzahl der zur Zeit t Überlebenden von den zur Zeit x Geborenen angibt. Ein solches System heißt aggregativ für das Überleben von der Ordnung k , wenn sich für jeden Wert von n die n in den Zeitpunkten x_1, x_2, \dots, x_n Geborenen durch $k < n$ (aber nicht weniger!) in den Zeitpunkten $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$ Geborene so ersetzen lassen, daß für jedes $t > y$ mit geeigneten Werten U_1, U_2, \dots, U_k und für ein neues System $g(x, t)$ die Gleichung besteht:

$$\prod_{v=1}^n \frac{f(x_v, t)}{f(x_v, y)} = \prod_{\alpha=1}^k \left\{ \frac{g(\alpha_\alpha, t)}{g(\alpha_\alpha, y)} \right\}^{U_\alpha}.$$

Hingegen heißt ein System $f(x, t)$ aggregativ für das Absterben von der Ordnung k , wenn für jeden Zeitpunkt z und bei derselben Bedeutung der übrigen Größen die Gleichung besteht:

$$\prod_{\nu=1}^n \frac{f(x_{\nu}, z) - f(x_{\nu}, t)}{f(x_{\nu}, y)} = \prod_{\kappa=1}^k \left\{ \frac{g(\alpha_{\kappa}, z) - g(\alpha_{\kappa}, t)}{g(\alpha_{\kappa}, y)} \right\}^{U_{\kappa}}.$$

Verf. leitet die allgemeine Form eines aggregativen Systems für das Überleben her; dieses besitzt stets die Eigenschaft der „uniform seniority“. Im speziellen Fall, daß $f(x, t)$ nur Funktion von $t - x$ ist, ergeben sich die bekannten Quiquetschen Absterbeordnungen. Hingegen existiert kein für das Absterben aggregatives System von höherer als der ersten Ordnung; insbesondere von der ersten Ordnung sind die Absterbeordnungen von De Moivre und Sang.

Robert Frucht (Trieste).

Gumbel, E. J.: *La table de mortalité traitée comme distribution*. Ann. Univ. Lyon, Sect. A, Sci. Math. et Astron., III. s. Fasc. 1, 48—68 (1936).

Das Alter x , in welchem ein Neugeborener sterben wird, werde als eine Zufallsvariable mit der Wahrscheinlichkeitsdichte $\vartheta(x)$ betrachtet (also ist $\int_0^{\infty} \vartheta(z) dz = 1$).

Bezeichnungen: Überlebensfunktion $= l(x) = \int_x^{\infty} \vartheta(z) dz$; Sterbeintensität $= \mu(x) = \frac{\vartheta(x)}{l(x)}$;

Lebenserwartung $= e(x) = \frac{1}{l(x)} \int_x^{\infty} l(z) dz$; Normalalter $= \xi$ = demjenigen Alter, für

welches $\vartheta(\xi) = \max_{x \geq 0} \vartheta(x)$ gilt; normale Lebenserwartung $= e(\xi)$. Unter gewissen, praktisch zutreffenden Voraussetzungen wird gezeigt, daß die folgenden vier Alter eine aufsteigende Folge bilden: das Alter, für welches $e(x)$ ein Maximum hat; das Alter, für welches $\mu(x)$ sein Minimum hat; das Alter, für welches $\vartheta(x)$ sein Minimum hat; das Normalalter ξ . An Hand von empirischem Tabellenmaterial ergibt sich, daß bei Sterbetafeln aus verschiedenen Zeiten oder für verschiedene Bevölkerungen, jedoch immer nur für dasselbe Geschlecht, mit wachsendem Normalalter die normale Lebenserwartung abnimmt. In einem weiteren Abschnitt wird eine Methode zur näherungsweisen Bestimmung der Gompertz-Makehamschen Konstanten angegeben, für welche nur die Kenntnis der Zahlen $x_1, x_2, \mu(x_1), \mu(x_2)$ erforderlich ist, wobei x_1 bzw. x_2 dasjenige Alter bedeutet, für welche $\vartheta(x)$ sein Minimum bzw. sein Maximum hat. Schließlich werden in Fortsetzung früherer Abhandlungen des Verf. [Giorn. Ist. Ital. Attuari 5, Nr 1 (1934) und 6, Nr 4 (1936); Z. Schweiz. Statistik u. Volkswirtschaft 69, Nr 4 (1933)] Untersuchungen über das „Grenzalter“ ω angestellt.

Birnbaum, (Lwów Polen).

Löer, Klemens: *Abhängigkeit der mathematischen Reserven von Sterblichkeit und Zins*. Göttingen: Diss. 1936. 39 S.

Giaccardi, F.: *Sull'identità fra funzione capitale di ammortamento vitalizio e riserva matematica*. Giorn. Mat. Finanz., II. s. 6, 46—56 (1936).

Borch, Fredrick: *Über eine Methode zur Vereinfachung der versicherungstechnischen Berechnungen bei doppelt abgestuften Sterbetafeln*. Skand. Aktuarie Tidskr. 19, 212—233 (1936).

Lenzi, E.: *Relazioni fra tassi nei prestiti per obbligazioni*. Giorn. Ist. Ital. Attuari 7, 340—350 (1936).

Nach Ermittlung einer Näherungsformel für den effektiven Zinsfuß einer Anleihe aus den bekannten Anlagenzinsfüßen der einzelnen Obligationen verschiedener Lebensdauer wird ein Weg zur raschen Berechnung dieser Größen selbst angegeben und schließlich eine sehr bequeme Formel zur genäherten Ermittlung des Effektivzinsfußes aufgestellt.

F. Knoll (Wien).

Geometrie.

Lebesgue, H.: Sur le postulatum d'Euclide. Bull. int. Acad. Yougoslave Sci. Beaux-Arts **29/30**, 42—43 (1936).

1. Es wird ein einfacher, direkter Weg angegeben, der in der absoluten Geometrie von dem Postulat, daß jedes Viereck in ein Dreieck eingeschlossen werden könne, auf das Verschwinden des Defekts der Dreieckswinkelsumme führt. 2. Für die Abhängigkeit des Parallelenpostulats vom Postulat der gestreckten Dreieckswinkelsumme wird ein unmittelbarer und anschaulicher (die Winkelarchimedizität heranziehender) Beweis angegeben.

Arnold Schmidt (Marburg, Lahn).

Wagner, Walter: Über die Grundlagen der projektiven Geometrie und allgemeine Zahlensysteme. Math. Ann. **113**, 528—567 (1936).

M. Dehn hat in einer Arbeit gleichen Titels [Math. Ann. **85** (1922)] die Frage nach der Existenz von Schnittpunktsätzen aufgeworfen, die nicht in jeder Desarguesschen Geometrie gelten und die in einer Desarguesschen Geometrie den Satz des Pascal nicht zur Folge haben. Die algebraische Formulierung dieses Problems lautet: Kann es in einem geordneten echten Schiefkörper eine zusätzliche Rechenregel (das ist eine solche, die nicht in jedem Schiefkörper erfüllt ist) geben von der Form, daß eine rationale Funktion von endlich vielen Parametern identisch in diesen Parametern verschwindet? In der vorliegenden Arbeit wird in dieser Richtung ein erstes abschließendes Resultat erreicht: Gilt in einem geordneten Schiefkörper, dessen Zentrum einen Teilkörper der reellen Zahlen enthält, eine zusätzliche Rechenregel von der Form, daß ein Polynom mit reellen Koeffizienten in endlich vielen Parametern identisch in diesen Parametern verschwindet, so ist der Schiefkörper ein kommutativer Körper. Diese Aussage gilt sogar für Schiefkörper ohne Nullteiler. — Im ersten Kapitel werden Beispiele von echten Schiefkörpern angegeben, in denen eine ganzrationale Rechenregel gilt. Es wird bewiesen, daß im Ring der quadratischen Matrizen n -ten Grades mit komplexen Elementen für jedes n eine solche Rechenregel gilt. Für zweireihige Matrizen $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}$ gilt z. B. die Identität

$$\mathfrak{C}(\mathfrak{A}\mathfrak{B} - \mathfrak{B}\mathfrak{A})^2 - (\mathfrak{A}\mathfrak{B} - \mathfrak{B}\mathfrak{A})^2 \mathfrak{C} = 0.$$

Ferner gilt in dem Ring der Elemente $\sum_{i,k=0}^{\infty} p_{ik} s^i t^k$ mit komplexen p_{ik} und der erzeugenden Springregel $ts = kt$ (k komplex) dann und dann eine ganzrationale Rechenregel, wenn k eine Einheitswurzel ist. Im zweiten Kapitel werden einige Hilfssätze aus dem Kalkül der ganzrationalen Rechenregeln ohne Zuhilfenahme der Anordnung bewiesen. Es genügt, sich auf zwei Argumente zu beschränken. Im dritten Kapitel wird die Anordnung herangezogen und der oben formulierte Hauptsatz bewiesen. Man hat dabei den stark-kommutativen und den fast-kommutativen Schiefkörper zu unterscheiden. Im ersten Falle gibt es ein Elementenpaar a, b und eine reelle Zahl u mit $0 < u < 1$, so daß $u|ab| > |ba|$; im zweiten Falle ist für jedes Elementenpaar a, b und jedes reelle u mit $0 < u < 1$ die Ungleichung $u|ab| \leq |ba|$ erfüllt. Der Nachweis der Unmöglichkeit einer ganzrationalen Rechenregel wird erbracht durch Abschätzung des Polynoms unter Zuhilfenahme der Sätze des zweiten Kapitels.

R. Moufang (Frankfurt a. M.).

Steck, Max: Über finite Geometrien und ihren Zusammenhang mit der Axiomatik der projektiven Geometrie. Deutsche Math. **1**, 578—588 (1936).

Verf. betrachtet finite Geometrien aus m Punkten und m Geraden, in denen zwei Punkte höchstens eine Verbindungsgerade, zwei Geraden höchstens einen Schnittpunkt haben, jeder der m Punkte mit n Geraden, jede der m Geraden mit n Punkten inzident ist. Es werden die Fälle $m = kn + 1$ für $k = 1, 2, 3$ untersucht und die zugehörigen Inzidenztafeln angeschrieben. Darunter sind die schon von anderer Seite untersuchten Veblen-Systeme enthalten; sie bestehen aus $l^2 - l + 1$ Punkten, deren jeder mit l Geraden inzident ist (entsprechend gilt die duale Aussage). Zum Schluß

wird an Hand einiger Beispiele erwähnt, daß die Inzidenztafeln der hier besprochenen Systeme finiter Geometrien sich durch Spiegelung des Schemas an einer Diagonale erzeugen lassen.

R. Moufang (Frankfurt a. M.).

Steck, Max: Eine vollständige endliche Geometrie des vollständigen Vierecks. Deutsche Math. 1, 588—592 (1936).

Es wird aufgezeigt, daß in dem Veblen-System (vgl. die vorstehend ref. Arbeit) aus 13 Punkten und 13 Geraden, von denen jedes Element der einen Klasse mit 4 Elementen der anderen Klasse inzident ist, ein vollständiges Vierseit mit nichtkollinearen Nebenecken enthalten ist, daß ferner für das auf einer Viereckseite existierende Punktequadrupel die Eigenschaft der Vertauschbarkeit der Paare des harmonischen Quadrupels gilt, wie aus der zu dem System gehörigen Inzidenztafel ersichtlich ist. Damit sind alle Elemente des Veblen-Systems aufgebraucht.

R. Moufang.

Weber, Werner: Über die Einheitlichkeit von Konstruktionen mit Zirkel und Lineal. Deutsche Math. 1, 635—665 (1936).

Es werden Konstruktionsaufgaben betrachtet, welche einem veränderlichen System von Strecken ξ_1, \dots, ξ_n eine einzige Strecke η zuordnen derart, daß dem System $k\xi_1, \dots, k\xi_n$ für $k > 0$ die Strecke $k\eta$ zugeordnet ist, und daß die Länge η der Strecke η algebraisch von den Längen ξ_1, \dots, ξ_n von ξ_1, \dots, ξ_n abhängt. Jede Länge ξ , möge dabei ein offenes Intervall I_ν durchlaufen. Es sei $N(\xi_1, \dots, \xi_n)$ eine homogene Form derart, daß $N \cdot \eta$ eine ganze algebraische Funktion von ξ_1, \dots, ξ_n ist. Wenn nun für jedes einzelne Streckensystem ξ_1, \dots, ξ_n aus I_1, \dots, I_n mit $N \neq 0$ die Strecke η mit Zirkel und Lineal konstruierbar ist, so gibt es auch eine einheitliche Konstruktionsmethode, die für alle Systeme ξ_1, \dots, ξ_n aus I_1, \dots, I_n mit $N \neq 0$ die Lösung η liefert. „Einheitlich“ bedeutet dabei: Nach einer bestimmten Konstruktionsvorschrift, die von den Längen der gegebenen Strecken unabhängig ist und nur die Wahl zwischen $a + b$ und $a - b$, also zwischen den beiden Schnittpunkten eines Kreises mit seinem Durchmesser, frei läßt. Durch ein Beispiel wird die Unentbehrlichkeit der Bedingung $N \neq 0$ dargetan.

van der Waerden (Leipzig).

John, Fritz: Moments of inertia of convex regions. Duke math. J. 2, 447—452 (1936).

Es sei R ein ebener konvexer Bereich, A sein Flächeninhalt, d sein Durchmesser und Δ seine Dicke. Ferner bezeichne λ das Verhältnis der großen zur kleinen Achse der zum Schwerpunkt gehörigen Trägheitsellipse von R bei homogener Belegung. Dann gelten die Ungleichungen $d \leq \lambda \Delta \sqrt{2}$, $A \leq \lambda \Delta^2$ und, wenn R einen Mittelpunkt hat, $d^2 \leq 2\lambda A$. Der Beweis verwendet Steinersche Symmetrisierungen. Da jeder Bereich R so affin transformiert werden kann, daß die Trägheitsellipse in einen Kreis übergeht, hat man insbesondere: Jeder konvexe Bereich R kann so affin transformiert werden, daß für den neuen Bereich die Ungleichungen $d \leq \Delta \sqrt{2}$, $A \leq \Delta^2$ und, wenn R einen Mittelpunkt hat, $d^2 \leq 2A$ bestehen; das Gleichheitszeichen steht überall für das Quadrat. (Diese und weitere verwandte Ergebnisse sind auf anderem Wege von Behrend in einer demnächst erscheinenden Arbeit gefunden worden.) Auf analoge Weise ergeben sich für einen konvexen Körper vom Volumen V , dessen Trägheitsellipsoid bezüglich des Schwerpunktes eine Kugel ist, die Ungleichungen $d \leq \Delta \sqrt{\frac{10}{3}}$, $V \leq \frac{\pi}{3} \Delta^3$, die jedoch nicht scharf sind.

W. Fenchel (Kopenhagen).

Kivikoski, E.: Kennzeichnung der Kurven zweiter und dritter Ordnung. Ann. Acad. Sci. Fennicae A 44, Nr 2, 1—31 (1935).

(Ebene) „Kurve“ bedeutet im folgenden: eindeutiges stetiges Kreisbild im projektiven R_2 , welches stückweise konvex und überall mit stetiger Tangente versehen ist; als „Singularitäten“ gelten: Wendepunkte, Spitzen, Doppelpunkte, Doppeltangenten. Verf. beweist folgenden Satz, vermöge dessen aus der Anzahl und Art der Singularitäten auf die lineare Ordnung der Kurve geschlossen werden kann: Besitzt die Kurve K an

Singularitäten höchstens einen Doppelpunkt und außerdem höchstens Wendepunkte, so ist K von höchstens der Ordnung drei. (Übrigens ist bekanntlich die Ordnung genau gleich zwei dann und nur dann, wenn keine Doppel-, Wendepunkte und Spitzen vorhanden sind.) Der Fall, daß kein Doppelpunkt, aber mindestens ein Wendepunkt auftritt, wurde vom Verf. schon früher erledigt [Soc. Sci. Fennicae Comment. phys.-math. 1, 27 (1922)] und wird in vorliegender Arbeit nochmals mitbewiesen. Außerdem werden einfache Beweise der Sätze von Möbius bzw. A. Kneser mitgeteilt, denen zufolge jede singularitätenfreie Kurve die Ordnung Zwei besitzt bzw. keine Kurve existiert, deren Singularitäten ausschließlich Doppelpunkte (bzw. ausschließlich Doppeltangenten) sind. Haupt (Erlangen).

Pauc, Chr.: Courbure dans les espaces métriques. Atti Accad. naz. Lincei, Rend., VI. s. 24, 109—115 (1936).

L'auteur cherche à étendre aux espaces métriques généraux les résultats obtenus par lui dans sa note [C. R. Acad. Sci., Paris 203 (1936); ce Zbl. 14, 275] pour les espaces euclidiens, sur la structure d'un continu au voisinage d'un point en lequel ce continu est pourvu d'une courbure. Les résultats sont beaucoup moins simples. S'il s'agit d'une courbure de Alt, le continu peut-être un „ n -Bein“ ou un „ ω -Bein“ au sens de Menger. S'il s'agit d'une courbure de Menger le continu est un arc rectifiable. Les hypothèses qui interviennent dans les démonstrations sont d'ailleurs plus faible que celles résultant de l'existence de l'une ou l'autre de ces courbures. Plusieurs démonstrations sont passées sous silence. Pour les autres le principe seul est indiqué.

E. Blanc (Paris).

Algebraische Geometrie:

Defrise, Pierre: Sur les courbes multiples cycliques. Rend. Semin. mat. Roma, IV. s. 1, 83—95 (1936).

Eine irreduzible algebraische Kurve f enthält eine zyklische birationale Transformation τ , die eine zyklische Punktgruppenschar γ'_ϱ erzeugt; die Gruppen der γ'_ϱ werden auf die Punkte einer Kurve φ eineindeutig abgebildet; die Punkte von f , φ entsprechen sich dann in einer $(\varrho, 1)$ Verwandtschaft. Es wird zunächst vorausgesetzt, daß ϱ eine Primzahl ist und daß τ keinen Fixpunkt besitzt. Zwei nichtäquivalente Punktgruppen G_1, G_2 der Kurve φ werden dann als ähnlich bezeichnet, wenn ihre entsprechenden Gruppen G'_1, G'_2 der Kurve f äquivalent sind; alle Gruppen, die einer gegebenen, effektiven oder virtuellen Gruppe G_1 ähnlich sind, verteilen sich auf ϱ ähnliche vollständige Linearscharen $|G_i|$ ($|G_1|$ mitgerechnet), die aus zwei von ihnen, $|G_1|$ und $|G_2|$, folgendermaßen ausgedrückt werden können: $|G_i| = (i-1)|G_2| - (i-2)|G_1|$ ($i = 2, 3, \dots, \varrho$). Man hat auch $\varrho|G_1| = \varrho|G_i|$. Wenn G_1 eine kanonische Gruppe von φ bedeutet, erhält man die Fundamentalscharen von φ , die im Falle $\varrho = 2$ von A. Comessatti schon betrachtet wurden. Man kann umgekehrt auf φ eine Ähnlichkeit zwischen ϱ Linearscharen $|G_i|$ durch die obigen Formeln a priori definieren; die Kurve f gehört dann einer eindeutig bestimmten Klasse irreduzibler Kurven an. — Wenn τ gewisse ϱ -fache Punkte $\Delta_1 \Delta_2 \dots \Delta_\delta$ besitzt, nimmt die Definition der Ähnlichkeit folgende Form an: $G'_1 + \sum n_i^{(1)} \Delta_i \equiv G'_2 + \sum n_i^{(2)} \Delta_i$ ($i = 1, 2, \dots, \delta$), wo die ganzen Zahlen $n_i^{(1)}$ und $n_i^{(2)}$ alle ≥ 0 und $\leq \varrho - 1$ sind; die gefundenen Sätze müssen dann entsprechend geändert werden. Weitere Änderungen hat man, wenn ϱ eine zusammengesetzte Zahl bedeutet. E. G. Togliatti (Genova).

Conforto, F.: Sui fasci d'Halphen i cui punti base appartengano ad una cubica ellittica degenera. Boll. Un. Mat. Ital. 15, 175—177 (1936).

This note contains enunciations of results which the author proves elsewhere. Given a cubic curve C_3 , rational or degenerate, in a plane, and eight points A_i on C_3 , the author determines the conditions under which there exist pencils of irreducible curves of order $3n$ having n -ple points at A_i and at another point A_9 of C_3 . The condition that this should be possible is (a) that at least one cubic through A_1, \dots, A_8 is irreducible and (b) that on C_3 the g_n^{n-1} cut by curves of order $3n$

having n -ple points at A_1, \dots, A_8 has at least one neutral pair consisting of distinct points. Such a pencil is reducible by quadratic transformations to a pencil of one of the following types: (I) C_3 has a node, the points A_1, \dots, A_8 being either all distinct from the node or such that one of them lies at the node and is followed by i infinitely near points ($1 \leq i \leq 8$) of which $i - 1$ lie on one branch of C_3 ; (II) C_3 consists of a line and a conic, one point A lies at an intersection of the two curves and is followed by six infinitely close points, five of them lying on the conic. *J. A. Todd.*

Ferrari, Wanda: Sulla degenerazione delle trasformazioni di prima specie di una cubica piana. *Ist. Lombardo, Rend., II. s. 69, 722—728 (1936).*

Grenzübergang von einer elliptischen ebenen C^3 zu einer rationalen C^3 der Klasse 4: die Transformationen 2. Art der C^3 in sich selbst liefern ∞^1 Projektivitäten auf der rationalen C^3 , während das Integral 1. Gattung sich auf das Integral einer rationalen Funktion reduziert. Die zwei Fälle der C^3 mit Knoten und mit isoliertem Doppelpunkt werden getrennt behandelt und auf folgende Gleichungen gestützt: $xy = x^3 + \lambda y^2 + 1$ und $y^2 = x(x - \lambda)(x - 1)$ für $\lambda \rightarrow 0$. Die parametrische Darstellung der rationalen Grenz- C^3 liefert in beiden Fällen die Transformationen 1. Art; das Produkt von zwei geeigneten solchen Transformationen führt zu einer Transformation 2. Art II; alle Transformationen 2. Art haben dann die exponentielle Form II^u ; und der Exponent u liefert die Grenzform des Integrals 1. Gattung. Man erhält so in den zwei Fällen die Funktionen \log und arctg , die auch unmittelbar aus dem Ausdruck von u für $\lambda = 0$ berechnet werden können. *E. G. Togliatti (Genova).*

Derwidué, L.: Sur deux congruences de cubiques gauches. *Bull. Soc. Roy. Sci. Liège 5, 197—199 (1936).*

In einer vorigen Mitteilung (*Bull. Acad. Roy. Belg., V. s. 22, 290—294; dies. Zbl. 13, 413*) hat Verf. eine Kongruenz zweiter Ordnung untersucht, die gebildet wird von den kubischen Raumkurven, die eine biquadratische Raumkurve in sechs veränderlichen Punkten treffen und in vier dieser Punkte die umgeschriebene Developpable dieser Kurve berühren. In dieser Mitteilung betrachtet er die besonderen Fälle, die man erhält, wenn die biquadratische Kurve einen Doppelpunkt besitzt oder aus zwei sich zweimal treffenden Kegelschnitten zusammengesetzt ist. *G. Schaaake.*

- Berzolari, Luigi:** Sulle quadriche passanti per i lati di un quadrilatero sghembo.
 I. *Ist. Lombardo, Rend., II. s. 69, 513—529 (1936).*
 II. *Ist. Lombardo, Rend., II. s. 69, 530—552 (1936).*

Analytische Behandlung verschiedener Eigenschaften der Quadriken Q , die durch die vier Seiten eines windschiefen Vierseits hindurchgehen; Mittelpunkt der Untersuchung ist der Hirstsche Satz über die Kongruenz der gemeinsamen Tangenten von zwei Quadriken F_1, F_2 der genannten Art: jene Kongruenz zerfällt in zwei Hirstsche Kongruenzen 2. Ordnung und 2. Klasse. Man findet hier die analytischen Beweise einer Reihe bekannter Sätze nebst einigen Eigenschaften, die bis jetzt noch nicht bemerkt worden waren; sie betreffen nicht nur die gemeinsamen Tangenten von F_1, F_2 , sondern auch verschiedene andere Gebilde, die mit F_1, F_2 in enger Beziehung stehen, wie z. B. den Hirstschen Komplex der Verbindungsgeraden der reziproken Punktepaare von zwei korrelativen Feldern: die eigentlichen singulären Geraden eines solchen Komplexes bilden eben eine Hirstsche Strahlenkongruenz. Es folgen einige schon von F. Schur und Th. Reye bemerkte Schließungssätze über die windschiefen Vierseite, deren Seiten F_1, F_2 berühren, und über ihre Verallgemeinerungen im Fall, wo mehr als zwei Quadriken Q betrachtet werden. Eine eingehende Behandlung finden dann die Kollineationen und Korrelationen, die das Quadrikenpaar F_1, F_2 in sich selbst verwandeln, und insbesondere diejenigen von ihnen, die involutorisch sind (darunter zwei und nur zwei Nullsysteme). Es folgt die Bestimmung der quadratischen Strahlenkomplexe, die in bezug auf jene Kollineationen und Korrelationen invariant oder

kovariant sind. Die Fälle, wo ein Paar oder die beiden Paare von gegenüberliegenden Seiten des gegebenen Vierseits aus zusammenfallenden Geraden bestehen, werden schließlich auch diskutiert. . . . *E. G. Togliatti (Genova).*

Edge, W. L.: Two canonical forms for a net of quadric surfaces. J. London Math. Soc. **11**, 194—202 (1936).

Détermination de deux formes canoniques pour les équations des quadriques de base d'un réseau. Ces deux formes se rattachent étroitement aux propriétés de la Hessienne \mathcal{H} du réseau et à certaines configurations intéressantes concernant la quartique plane générale δ qui correspond birationnellement à \mathcal{H} . *P. Dubreil (Nancy).*

De Franchis, M.: Dimostrazione del teorema fondamentale sulle superficie iperellittiche. Atti Accad. naz. Lincei, Rend., VI. s. **24**, 3—6 (1936).

An hyperelliptic surface F is an algebraic surface which admits a parametric representation by means of abelian functions of two parameters u, v , and the rank r of F is the number of pairs of values (u_i, v_i) , not congruent mod periods, which correspond to a generic point of F . Bagnera and de Franchis have proved in 1908 the following main theorem: if $r > 1$ and if F is not birationally equivalent to a ruled surface, then F is the image of an involution of order r , generated by a group of birational transformations into itself of an hyperelliptic surface f of rank 1. The proof was given under certain restrictions concerning the possible fundamental curves of the involution. In the present paper this restriction is removed by the simple procedure of showing that if F does not belong to the class of ruled surfaces, the above involution on f has no fundamental curves at all. *O. Zariski (Baltimore).*

Severi, Francesco: Il rango di una corrispondenza a valenza sopra una superficie. Boll. Un. Mat. Ital. **15**, 161—169 (1936).

Sur une surface algébrique, F , soit T une correspondance quelconque à valence zéro, c'est-à-dire une correspondance transformant les points de F dans des groupes de points appartenant à une même série d'équivalence. En indiquant avec α, β les indices, et avec u le nombre (virtuel) des points unis de T , l'A. appelle rang de T le nombre $\delta(T) = u - \alpha - \beta$; si T_i sont des correspondances à valence zéro et si, λ_i désignant des entiers ≥ 0 , $T = \sum \lambda_i T_i$, il résulte: $\delta(T) = \sum \lambda_i \delta(T_i)$. Donner une autre signification géométrique du rang, c'est démontrer le principe de correspondance sur les surfaces pour les correspondances à valence zéro: ce qui est fait dans cette Note tant au point de vue projectif, en faisant intervenir les correspondances dégénérées (de 1^e, 2^e et 3^e espèce) et les correspondances de Zeuthen (virtuellement dépourvues de points exceptionnels), comme au point de vue invariantif, où il joue d'une façon essentielle la théorie de la base des courbes algébriques tracées sur F ; précisément, si C_1, C_2, \dots, C_e est une base intermédiaire avec le discriminant $\Delta = |[C_i, C_j]|$, et si de plus

$$\tau_h T(C_h) \equiv \tau_h \sum_j \mu_j^h C_j \quad (\text{avec } \tau_h, \mu_j^h \text{ entiers}),$$

il résulte:

$$\delta(T) = \frac{1}{\Delta} \sum_{ij} \Delta_{ij} [C_i, C_j],$$

où Δ_{ij} est le déterminant qu'on obtient en substituant $\mu_j^1, \mu_j^2, \dots, \mu_j^e$ dans Δ aux nombres de la i -ème verticale (tous les Δ_{ij} sont des entiers divisibles par Δ). Ces résultats se trouvent substantiellement déjà dans les travaux précédents de l'A. [Atti Accad. naz. Lincei, Rend., VI. s. **17**, 681, 759, 869, 876 (1933), ce Zbl. **7**, 76, 175, 255; Mem. Accad. Ital. **5**, 239 (1934), ce Zbl. **8**, 321] avec en plus leur interprétation géométrique-fonctionnelle; mais ils sont ici approfondis et accompagnés par des remarques intéressantes, soulignant la non parfaite généralité des recherches postérieures sur le sujet de G. Albanese [Ann. Scuola norm. super. Pisa, II. s. **3** (1934); ce Zbl. **9**, 33] et J. A. Todd [Ann. of Math. **36**, 325 (1935); ce Zbl. **12**, 120]. *Beniamino Segre.*

Gussenhoven, Lila: Invariants projectifs de la surface intersection de deux hyperquadriques d'un espace S_4 . *Mathesis* **50**, 259—262 (1936).

D'après Segre [*Math. Ann.* **24** (1884)], toute surface du 4^{ème} ordre F_4 intersection de deux hyperquadriques d'un espace S_4 est rationnelle et représentable sur un plan par le système complet des cubiques ayant 5 points-bases simples. Au moyen de cette représentation, l'auteur montre qu'une F_4 dépourvue de point double possède 16 droites distinctes dont chacune est coupée par 5 autres; les 16 groupes de 5 points d'intersection sont projectifs entre eux et définissent projectivement la surface parmi les surfaces du même type. Étude de quelques cas particuliers. *P. Dubreil* (Nancy).

Godeaux, Lucien: Sur une variété rationnelle à trois dimensions. *Bull. Soc. Roy. Sci. Liège* **5**, 184—186 (1936).

Es handelt sich um die Schnitt- V_3 von $n - 3$ Quadriken eines Raumes S_n , die einen Raum σ_{n-4} gemein haben ($n \geq 5$): Gleichungen jener V_3 und Darstellung auf einem S_3 durch Projektion aus σ_{n-4} . Die Schnittfläche der V_3 mit σ_{n-4} hat Verf. schon untersucht (dies. *Zbl.* **13**, 77). *E. G. Togliatti* (Genova).

Differentialgeometrie:

Kline, Morris: Note on elementary vector analysis and on an application to differential geometry. *Amer. Math. Monthly* **43**, 555—563 (1936).

Weatherburn, C. E.: On certain related curves. *Math. Gaz.* **20**, 320—321 (1936).

Diskussion solcher Paare von Raumkurven C, C_1 , daß die Binormalen von C zugleich Normalen, speziell Hauptnormalen von C_1 sind. *W. Fenchel* (Kopenhagen).

Inzinger, Rudolf: Zur Infinitesimalgeometrie der Berührungstransformationen. *Anz. Akad. Wiss., Wien* **1936**, 198—202 (Nr 20).

Der Verf. betrachtet eine Abbildung der Streifenelemente eines Flächenelementes (x, y, z, p, q) auf die Punkte (x_1, x_2, x_3, x_4) eines dreidimensionalen Raumes R_3 . Insbesondere für das Flächenelement $(0, 0, 0, 0, 0)$ ist dieselbe mittels der Formeln $x_1 : x_2 : x_3 : x_4 = -dp : dq : dy : dx$ definiert. Durch die Abbildung wird jeder Berührungstransformation, die ein Flächenelement invariant läßt, eine Transformation im R_3 zugeordnet, und zwar eine Kollineation, die ein lineares Strahlgewinde invariant läßt. Es erweist sich somit die Geometrie der Berührungstransformationen in einem festen Flächenelement als äquivalent zur Geometrie eines linearen Strahlgewindes.

O. Borůvka (Brno).

Vincensini, Paul: Surfaces déformables avec transformation des réseaux cinématiquement conjugués en réseaux conjugués. *C. R. Acad. Sci., Paris* **203**, 973—975 (1936).

Soit S, S_1 et Σ trois surfaces applicables dont les réseaux cinématiquement conjugués sur S, S_1 correspondent aux réseaux conjugués (au sens de Dupin) de Σ . Comme le réseau conjugué commun de S, S_1 fait partie de la famille de réseaux cinématiquement conjugués de S, S_1 , un réseau conjugué lui correspond sur Σ . Ce réseau conjugué sur trois surfaces applicables, persiste dans une déformation continue. Inversement chaque déformation à réseau conjugué persistant procure ∞ transformations décrites. Il suffit de prendre comme Σ une surface arbitraire qui porte le réseau et comme S, S_1 celles dont les secondes formes s'obtiennent en multipliant les coefficients homologues de la seconde forme de Σ le premier par α , le troisième par $\frac{1}{\alpha}$ ou bien (pour obtenir S_1) le premier par $-\frac{1}{\alpha}$, le troisième par $-\alpha$ ($\alpha = \text{const}$). *Finikoff*.

Gambier, Bertrand: Surfaces dont les asymptotiques de l'un ou l'autre système appartiennent à des complexes linéaires. *C. R. Acad. Sci., Paris* **203**, 971—973 (1936).

L'A. a récemment envisagé un des trois types (de la classification de A. Terracini) des surfaces dont les asymptotiques des deux systèmes appartiennent à des complexes linéaires [*C. R. Acad. Sci., Paris* **203**, 700 (1936); ce *Zbl.* **15**, 126]. Il considère maintenant les surfaces des deux types qui restent (mais il dit par méprise

que ces surfaces ont les asymptotiques de l'un ou de l'autre système dans des complexes linéaires); il détermine l'enveloppe des quadriques de Lie relatives, et remarque que chacune d'elles appartient à un système infini de surfaces du même type, avec mêmes premières et secondes directrices de Wilczynski. *Beniamino Segre* (Bologna).

Hall, Newman A., and Francis Clauser: On the laplacian of a vector point function. *Philos. Mag.*, VII. s. 22, 967—970 (1936).

Beweis der Formel

$$g^{st}(V_t V_s u_r - V_r V_t u_s) = -\frac{1}{g} e^{tpl} e^{mns} g_{pr} g_{im} V_t V_s u_n$$

in einer V_3 mit dem Fundamentaltensor g_{rs} . Der Beweis wird durch die Ausrechnung in einem speziellen Koordinatensystem geliefert. *Hlavatý* (Praha).

Berwald, L.: On the projective geometry of paths. *Ann. of Math.*, II. s. 37, 879 bis 898 (1936).

Gegeben sei: eine symmetrische — bis auf bahntreue Transformationen bekannte — Konnexion $\Gamma_{jk}^i = \Gamma_{kj}^i$ $\hat{\Gamma}_{jk}^i = \Gamma_{jk}^i - \delta_j^i p_k - \delta_k^i p_j$ ($p_j =$ bel. Vektor) (1)

und ein quadratischer symmetrischer Tensor Γ_{jk} . Jede Geodätische, welche auf ihren affinen Parameter s bezogen wird, hat die Gleichung

$$\frac{d^2 x^i}{ds^2} + \Gamma_{jk}^i \frac{dx^j}{ds} \frac{dx^k}{ds} = 0. \quad (i, j, k = 1, \dots, n) \quad (2)$$

Der „normale projektive Parameter“ π wird dann folgendermaßen definiert:

$$\{\pi, s\} \equiv \frac{d^3 \pi}{ds^3} - \frac{3}{2} \left(\frac{d^2 \pi}{ds^2} \right)^2 = -2M \Gamma_{jk}^i \frac{dx^j}{ds} \frac{dx^k}{ds}. \quad (M = \text{konst.} \neq 0) \quad (3)$$

Dieser Parameter ist invariant in bezug auf die Koordinatentransformation

$$\bar{x}^i = \bar{x}^i(x^1, \dots, x^n) \quad (4a)$$

mit nicht verschw. Determ. Die verlangte Invarianz in bezug auf (1) führt auf eine ganz bestimmte (vom Verf. angegebene) Transformationsweise des Tensors Γ_{jk}^i in bezug auf (1). Daraus kann sofort für die überzählige Koordinate

$$x^0 = -\frac{1}{2M} \log \frac{ds}{d\pi} \quad (5)$$

(bzw. für ihr Differential) die Transformationsweise

$$d\bar{x}^0 = dx^0 + \frac{1}{M} p_i dx^i \quad (4b)$$

gefolgt werden. Die Gleichungen

$$\{s, \pi\} = 2M \Gamma_{jk}^i \frac{dx^j}{d\pi} \frac{dx^k}{d\pi}, \quad \frac{d^2 x^i}{d\pi^2} + 2M \frac{dx^0}{d\pi} \frac{dx^i}{d\pi} + \Gamma_{jk}^i \frac{dx^j}{d\pi} \frac{dx^k}{d\pi} = 0$$

[welche aus (2) und (3) folgen] führen zum System

$$\frac{d^2 x^\alpha}{d\pi^2} + \Pi_{\beta\gamma}^\alpha \frac{dx^\beta}{d\pi} \frac{dx^\gamma}{d\pi} = 0 \quad (\alpha, \beta, \gamma = 0, \dots, n) \quad (6)$$

für die Geodätischen, wo $\Pi_{jk}^i = \Gamma_{jk}^i$, $\Pi_{jk}^0 = \Gamma_{jk}^0$, $\Pi_{\beta 0}^\alpha = \Pi_{0\beta}^\alpha = M \delta_\beta^\alpha$ gesetzt wurde. Die Koeffizienten Π transformieren sich, im Falle daß p_i ein Gradientenvektor ist (Veblensche „geometry of paths“), als Konnexionskoeffizienten in bezug auf die Koordinatentransformation (4a b). Ausgehend von dem Krümmungstensor dieser Konnexion gelangt man zu dem „Krümmungstensor der projektiven „geometry of paths““ $*B_{jkl}^i$, der für den Fall $*B_{kji}^i = 0$ (der die Bestimmung von Γ_{ij} gestattet und also auf einen ausgezeichneten projektiven normalen Parameter führt) in den bekannten Weylschen Tensor übergeht. Selbstverständlich ist aber schon $*B_{jkl}^i$ in bezug auf (1) invariant. — Um auch die Thomassche Methode mit diesem Verfahren zu umfassen, genügt es,

$p_i = \frac{1}{n+1} \Gamma_{ji}^j$ zu setzen und dann in oben angeführter Weise mit p (Thomassche projektive Parameter), $\hat{\Gamma}_{jk}^i$, $\hat{\Gamma}_{jk}$ (wo der eben erwähnte Wert für p_i eingesetzt wird) statt mit s , Γ_{jk}^i , Γ_{jk} fortzufahren. Die entsprechende resultierende Konnexion ist dann

$$*\Gamma_{jk}^i = \hat{\Gamma}_{jk}^i, \quad *\Gamma_{jk}^0 = \hat{\Gamma}_{jk}, \quad *\Gamma_{\beta 0}^\alpha = *\Gamma_{0\beta}^\alpha = M \delta_\beta^\alpha, \quad (7)$$

und die Koordinatentransformation besteht aus (4a) und

$$\bar{x}^0 = x^0 - \frac{1}{M(n+1)} \log \det \left| \frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^j} \right| + \text{konst.} \quad (4c)$$

Neben dem projektiven Äquivalenzsatz führt der Verf. noch die Methode an, welche das oben geschilderte Verfahren auf die Finslerschen Räume anzuwenden gestattet. — So wie der Veblen-Thomassche Standpunkt (neben dem neuen Cartanschen) in der projektiven Geometrie in einer Richtung bahnbrechend war, so kann man wohl erwarten, daß diese Auffassung des Verf. neue Möglichkeiten der projektiven Differentialgeometrie der gekrümmten Räume eröffnet.

Hlavatý (Praha).

Schouten, J. A., und J. Haantjes: Beiträge zur allgemeinen (gekrümmten) konformen Differentialgeometrie. II. Math. Ann. 113, 568—583 (1936).

(Vgl. die erste Arbeit derselben Verff., dies. Zbl. 13, 367, weiter als I. zitiert.) Die in I. ausgearbeitete Methode für $2 < n \neq 2p$ wird hier auf den Fall $n = 2p$ umgeformt. Der springende Punkt ist wieder das Aufsuchen der Ableitungen von $\alpha_{\alpha\beta}$, aus welchen dann (mittels einer Reihenentwicklung mit vorausgesetzter Konvergenz) die $\alpha_{\alpha\beta}$ fortgesetzt werden. Während in I. diese Ableitungen aus algebraischen Gleichungen berechnet werden können, führt hier die in I. angegebene Methode zuerst zu einer notwendigen Bedingung für die Existenz der Einbettung, welche in Form einer konforminvarianten Differentialgleichung geschrieben werden kann. Diese ist für $p = 1$ (das ist $n = 2p = 2$) und auch für p beliebig im konform-Einsteinschen Falle identisch erfüllt. Für $p = 2$ wird diese Bedingung explizit angegeben. Ist diese Bedingung erfüllt, so können die ersten p Ableitungen von $\alpha_{\alpha\beta}$ als Lösungen eines Systems von Differentialgleichungen ausfindig gemacht werden. Jede solche Lösung führt zu einer Art der Einbettung. Für $p = 1$ sind solche zwei Einbettungen „wesentlich verschieden“ (das ist, diese Einbettungen haben nicht die unter 2 in I. erwähnten Eigenschaften), obwohl jeder der konstruierten Räume linear projektiv ist. Ist der untersuchte Raum konform-Einsteinsch und $p > 1$, so läßt sich eine konforminvariante Vorschrift angeben, welche zu nicht wesentlich verschiedenen Einbettungen führt.

Hlavatý (Praha).

Davies, E. T.: On the deformation of a subspace. J. London Math. Soc. 11, 295 bis 301 (1936).

(Die Symbolik dieser Abhandlung ist den Arbeiten Schouten-Kampen, dies. Zbl. 8, 179, und Schouten-Struik, dies. Zbl. 11, 174 entnommen. Hier wird die Bezeichnung des zuerst erwähnten Referates gebraucht.) Bei der Punkttransformation

$$\bar{\xi}^\nu = \xi^\nu + v^\nu dt \quad (1)$$

werden bekanntlich die Einheitsaffinoren B_a^ν bzw. C_p^ν einer X_m in V_n bzw. der komplexen X_n^{n-m} folgendermaßen deformiert:

$$\left. \begin{aligned} \bar{B}_a^\nu &= B_a^\nu + \overset{3}{d} B_a^\nu + \overset{43}{D} B_a^\nu, \\ \bar{C}_p^\nu &= C_p^\nu + \overset{3}{d} C_p^\nu + \overset{43}{D} C_p^\nu. \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

Dabei ist selbstverständlich $\overset{43}{D} B_a^\nu = 0$, und aus der Voraussetzung $e^{\lambda \overset{43}{p}} D e_\lambda = 0$ kann auch $\overset{43}{D} C_p^\nu = -2 C_p^\mu a^\nu e V_{(\mu} v_{\nu)} dt$ gefolgert werden. Diese Formel (und die analogen für B_a^ν und C_p^ν) werden dann zur Berechnung der absoluten Variation der Konnexionen-

koeffizienten $'\Gamma_{bc}^a$ bzw. $''\Gamma_{cq}^p$ in X_m bzw. X_n^{n-m} gebraucht. Ausgehend von den bekannten Definitionen dieser Koeffizienten bekommt man

$$\left. \begin{aligned} D {}^{43}\Gamma_{bc}^a &= B_{\nu bc}^{\lambda \mu} \left({}^{13}D\Gamma_{\lambda \mu}^{\nu} \right) + H_{bc}^{\cdot \cdot \nu} \left({}^{43}DB_{\nu}^{\cdot} \right), \\ D {}^{43}\Gamma_{cq}^p &= C_{\nu q}^{\lambda \mu} B_c^{\mu} \left({}^{13}D\Gamma_{\lambda \mu}^{\nu} \right) - C_q^{\nu} \left({}^{43}DB_{\nu}^{\cdot} \right) H_{bc}^{\cdot \cdot p}. \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

Bedenkt man, daß die Formel (2) auch für eine beliebige Größe Φ richtig ist, so kann man durch bloße Ausrechnung die Anwendung des Operatorkerns ${}^{43}DD_c - D_c D$ auf Φ berechnen. Dabei ist D der bekannte Operatorkern der D -Symbolik (v. d. Waerden-Bortolotti). Die so erhaltene Formel hat verschiedene Anwendungen, von denen die Levi-Civitasche Formel der geodätischen Abweichung, welche der Verf. in der Form

$$\left({}^{13}D\Gamma_{\mu\nu}^{\lambda} \right) \frac{d\xi^{\mu}}{ds} \frac{d\xi^{\nu}}{ds} = 0$$

schreibt, zitiert werden soll. [Vgl. auch Bortolotti, Giorn. Mat. **66**, 153—186 (1928); Dienes, dies. Zbl. **9**, 273.] Hlavatý (Praha).

Topologie:

Erdős, P., T. Grünwald und E. Weiszfeld: Über Eulersche Linien unendlicher Graphen. Mat. fiz. Lap. **43**, 129—140 (1936) [Ungarisch].

Die Verff. beantworten die bei D. König: „Theorie der endlichen und unendlichen Graphen“ (Leipzig 1936) aufgeworfene Frage, wie man die bekannten Eulerschen Graphensätze, die sich dem Problem der Königsberger Brücken anschließen, auf unendliche Graphen ausdehnen kann. Unter anderem wird folgender Satz bewiesen. Ein unendlicher Graph besitzt dann und nur dann eine (beiderseits unendliche) Eulersche Linie, d. h. dann und nur dann kann man die Kanten des Graphen in einer beiderseits unendlichen Folge von der Art

$$\dots, P_{-2}P_{-1}, P_{-1}P_0, P_0P_1, P_1P_2, \dots$$

(wo jede Kante nur einmal vorkommt) aufzählen, wenn folgende Bedingungen erfüllt sind: 1. Der Graph ist zusammenhängend. 2. Er besitzt abzählbar unendlich viele Kanten. 3. Er besitzt keinen solchen Knotenpunkt, in dem eine ungerade Anzahl von Kanten zusammenlaufen. 4. Entfernt man in beliebiger Weise endlich viele Kanten, so gibt es unter den zusammenhängenden Bestandteilen des entstehenden Graphen a) höchstens zwei unendliche Graphen; b) bilden die weggelassenen Kanten einen solchen Graphen, in dem nach jedem Knotenpunkt eine gerade Anzahl von Kanten laufen, so gibt es genau einen unendlichen Graphen. Hieraus ergibt sich z. B. unmittelbar, daß der gewöhnliche Gittergraph des n -dimensionalen Euklidischen Raumes für jedes n eine beiderseits unendliche Eulersche Linie besitzt. *Autoreferat.*

Walker, R. J.: The Betti numbers of cyclic products. Bull. Amer. Math. Soc. **42**, 709—714 (1936).

Es sei S ein topologischer Raum und G eine Permutationsgruppe der Ziffern $1, \dots, n$. Unter dem Produkt $G(S)$ von S in bezug auf G wird die Menge aller n -Tupel (P_1, \dots, P_n) verstanden, wobei P_1, \dots, P_n beliebige Punkte von S sind und $(P_{i_1}, \dots, P_{i_n})$ dann und nur dann als identisch mit (P_1, \dots, P_n) betrachtet wird, wenn die Permutation $\begin{pmatrix} 1, \dots, n \\ i_1, \dots, i_n \end{pmatrix}$ zu G gehört. Die Umgebungen in $G(S)$ werden in naheliegender Weise festgesetzt. Ist S ein Komplex, so auch $G(S)$. Man kann $G(S)$ auch dadurch erhalten, daß man auf das n -fache topologische Produkt K^n von S mit sich selbst eine gewisse zu G isomorphe Gruppe von topologischen Selbstabbildungen ausübt und äquivalente Punkte von K^n identifiziert. Es wird nun ein Verfahren angegeben, um eine Bettische Basis von $G(S)$ zu konstruieren, wenn eine solche von S bekannt ist. Dieses Verfahren wird insbesondere auf die „zyklischen“ Produkte angewendet, das sind diejenigen Produkte $G(S)$, in denen G die zyklische Gruppe der Ordnung n ist. *Seifert.*

Steenrod, Norman E.: Universal homology groups. Amer. J. Math. 58, 661—701 (1936).

Verf. beweist, daß die additive Gruppe κ der modulo 1 reduzierten reellen Zahlen (= die Gruppe der Drehungen der Kreislinie) einen universellen Koeffizientenbereich (s. unten) für die Homologietheorie Hausdorffscher Räume (im Sinne von Čech) bildet. In einer dazu dualen Weise ergibt sich ferner, daß der ganzzahlige Koeffizientenbereich für die „duale“ Homologietheorie im Sinne von Alexander und Kolmogoroff (vgl. etwa Alexander, dies. Zbl. 12, 230), mittels der Čechschen Methode auf topologische Räume übertragen, ebenfalls universal ist. Hierin ist insbesondere ein früheres Resultat von Čech enthalten. („Die ganzen Zahlen bilden einen universellen Koeffizientenbereich für unendliche Komplexe“, wobei die algebraischen Komplexe endliche Linearformen sind). Für die Homologietheorie mit unendlichen Linearformen als algebraische Komplexe ist (im Falle eines unendlichen Komplexes) κ der universelle Koeffizientenbereich. Das Hauptresultat des Verf. lautet für Hausdorffsche Räume ganz allgemein folgendermaßen: Es seien: A ein Hausdorffscher Raum, $B \subset A$ abgeschlossen in A , J eine beliebige Abelsche Gruppe (der Koeffizientenbereich), $B^r(A, B, J)$ die r -dimensionale Bettische Gruppe von A mod B in bezug auf J . Dann ist $B^r(A, B, J)$ direkte Summe zweier Gruppen S und T , von denen die erste eine Invariante des Gruppenpaares $J, B^{r+1}(A, B, \kappa)$ und T eine Invariante des Gruppenpaares $J, B^r(A, B, \kappa)$ ist. Dabei ist zu bemerken: J ist eine topologische Abelsche Gruppe; die Bettischen Gruppen $B^r(A, B, J)$ sind dann in einer natürlichen Weise ebenfalls als topologische Gruppen definiert; als Isomorphismen werden nur topologische Isomorphismen betrachtet. Dagegen treten in der dualen Theorie die Koeffizientenbereiche als nichttopologisierte Gruppen auf. Der Darstellung der obigen Sätze geht eine sehr sorgfältige Darstellung der allgemeinen (nicht notwendig abzählbaren, also teilweise geordneten) Projektionsspektren, eine entsprechende Theorie der Homomorphismensysteme von Gruppen und eine darauf aufgebaute (Čech) Theorie der Bettischen Gruppen topologischer Räume in bezug auf einen beliebigen topologisierten Koeffizientenbereich voran. Da für Kompakta die Čechsche Theorie mit der üblichen inhaltlich übereinstimmt, ist κ ein universaler Koeffizientenbereich für die Homologietheorie der Kompakta, womit eine Vermutung des Ref. bestätigt ist.

P. Alexandroff (Moskau).

Kiang, Tsai-Han: On the Poincaré's groups and the extended universal coverings of closed orientable two-manifolds. J. Chin. Math. Soc. 1, 93—153 (1936).

Die Fundamentalgruppe einer zweiseitigen, geschlossenen Fläche M^* von einem Geschlecht $p > 1$ läßt eine Erweiterung durch ideale Elemente zu, deren Menge man zu der Menge U der „unendlich fernen“ Punkte der universellen Überlagerungsfläche M von M^* in umkehrbar eindeutige Beziehung setzen kann. Dabei kann man U durch einen Kreis darstellen, auf dessen Inneres man M topologisch abbildet. Diese idealen Elemente haben teils bei der Aufsuchung von Invarianten von Abbildungsklassen, teils bei Untersuchungen über den Verlauf geodätischer Linien auf M^* eine Rolle gespielt. Der nächstliegende Weg zu ihrer Einführung ergab sich aus der geometrischen Darstellung von M durch das Innere eines Kreises und Ausnutzung der auf diesen als Fundamentalgebilde gegründeten hyperbolischen Metrik; diese Hilfsmittel sind bekanntlich von Poincaré eingeführt. — Verf. wählt einen anderen Zugang zu den idealen Elementen, indem er sie in den ersten beiden Abschnitten seiner Arbeit auf dem Boden der abstrakten Gruppentheorie als gewisse Erzeugendenfolgen einführt und nachweist, daß sie sich zyklisch anordnen und durch die Punkte eines Kreises eindeutig repräsentieren lassen. Als Ausgangspunkt dient dabei der Begriff der reduzierten Erzeugendenfolge, der von M. Dehn [Math. Ann. 72 (1912)] eingeführt und vom Ref. [Acta math. 50 (1927)] weiter ausgebaut ist. Um Invarianz gegenüber topologischer Abbildung von M und Unabhängigkeit von jeder Hilfsmetrik zu erzielen, muß Verf. auf die Darstellung der Fundamentalgruppe mittels der Überlage-

rungsfläche M und die Ausnutzung der in der nichteuklidischen Metrik liegenden Anschaulichkeit verzichten und überall rein kombinatorisch verfahren. Er stützt dabei den Reduktionsprozeß auf einen Satz von Schreier über freie Produkte mit vereinigten Untergruppen. — In den beiden letzten Abschnitten geht Verf. dann ausführlich auf eine bekannte metrisch reguläre kanonische Darstellung von M^* und M ein, beschreibt die dualen Netze, von denen das eine bei geeigneter Bezeichnung zugleich das Dehnsche Gruppenbild der Fundamentalgruppe ist, führt die unendlich fernen Punkte von M direkt als Limespunkte der Netzeckpunkte ein und zeigt, daß die reduzierten Wege auf dem Netz diesen unendlich fernen Punkten in der Weise entsprechen, wie dies vorher in der abstrakten Theorie sich zwischen reduzierten Erzeugendenfolgen und idealen Elementen ergeben hatte, so daß die kanonische Darstellung ein topologisches Bild für die abstrakt gebildete Überlagerungsmannigfaltigkeit einschließlich der idealen Punkte (extended universal covering im Titel) bildet.

Jakob Nielsen (Kopenhagen).

Threlfall, W.: *Quelques résultats récents de la topologie des variétés.* Enseignement Math. 35, 242—255 (1936).

The author reviews recent interesting efforts to catalogue restricted classes of simple n -manifolds ($n \geq 3$), such as lens spaces and fibred spaces, which are natural representations of sets of rudimentary physical or geometrical objects. *A. W. Tucker.*

Whitney, Hassler: *The imbedding of manifolds in families of analytic manifolds.* Ann. of Math., II. s. 37, 865—878 (1936).

Sind f_1, \dots, f_{n-m} differenzierbare Funktionen in einer offenen Teilmenge des euklidischen Raumes E^n , und sind die Vektoren $\text{grad } f_1, \dots, \text{grad } f_{n-m}$ in jeder gemeinsamen Nullstelle von f_1, \dots, f_{n-m} linear unabhängig, so wird durch die Gleichungen $f_1 = \dots = f_{n-m} = 0$ eine m -dimensionale Mannigfaltigkeit definiert, die „regulär“ in E^n eingelagert ist. Nicht jede Mannigfaltigkeit läßt sich regulär einlagern, nicht z. B. nichtorientierbare Mannigfaltigkeiten. Aber auch orientierbare geschlossene Mannigfaltigkeiten gibt es, die sich in keinen euklidischen Raum regulär einlagern lassen, wie E. Stiefel [Comment. math. helv. 8, 305—353 (1936); dies. Zbl. 14, 416] gezeigt hat. Ist aber eine Mannigfaltigkeit M^m regulär in den E^n eingelagert, so beweist Verf. — sogar für einen noch allgemeineren Begriff der regulären Einlagerung — die Existenz einer $(n-m)$ -parametrischen Schar von homöomorphen analytischen Mannigfaltigkeiten, in die sich M^m einbetten läßt und die eine volle Umgebung von M^m ausfüllen.

H. Seifert (Heidelberg).

Borsuk, Karol: *Sur le plongement des espaces dans les rétractes absolus.* Fundam. Math. 27, 239—243 (1936).

Es werden bewiesen: Satz I. Jedes Kompaktum F kann durch ein unendliches Polyeder P zu einem absoluten Retrakt $F + P$ ergänzt werden. Satz II. Jedes Kompaktum F kann durch ein unendliches höchstens n -dimensionales Polyeder P^n zu einem in allen Dimensionen $< n$ im Lefschetzschen Sinne lokal-zusammenhängenden Kompaktum $F + P^n$ ergänzt werden.

P. Alexandroff (Moskau).

Wardwell, James F.: *Continuous transformations preserving all topological properties.* Amer. J. Math. 58, 709—726 (1936).

Verf. behandelt die Frage nach hinreichenden Bedingungen dafür, daß, wenn A und B zwei kompakte metrische Räume sind und $B = T(A)$ ein stetiges Bild von A ist, A und B homöomorph sind. Verf. gibt 3 zusammen hinreichende Bedingungen an, die sich auf die Urbildmengen $T^{-1}(b)$ der Punkte b von B beziehen und von denen die wichtigste lautet: Für jedes $\varepsilon > 0$, jeden Punkt b aus B und jeden Punkt a aus $T^{-1}(b)$ existiert eine Homöomorphie zwischen $A - a$ und $A - T^{-1}(b)$, die außerhalb der ε -Umgebung von $T^{-1}(b)$ die Identität ist.

Nöbeling (Erlangen).

Vedenisoff, N.: *Sur les fonctions continues dans des espaces topologiques.* Fundam. Math. 27, 234—238 (1936).

Urysohn hat bewiesen: Damit in einem topologischen Raum R zu jedem Paar

fremder abgeschlossener Mengen F und Φ eine in ganz R definierte und stetige Funktion $f(x)$ existiere mit $0 \leq f(x) \leq 1$, die auf F überall $=0$ und auf Φ überall $=1$ ist, ist notwendig und hinreichend, daß R normal sei [Math. Ann. **94**, 309 (1925)]. Verf. zeigt: Damit dieses $f(x)$ stets so gewählt werden kann, daß sogar F bzw. Φ die Menge aller x mit $f(x) = 0$ bzw. $=1$ sei, ist notwendig und hinreichend, daß R vollständig normal sei. (Zur Terminologie vgl. Alexandroff-Hopf, Topologie I. Berlin: Julius Springer 1935.)

Nöbeling (Erlangen).

Mechanik.

● Julia, Gaston: Cours de cinématique. Rédigé par Jean Dieudonné. 2. édit. Paris: Gauthier-Villars 1936. 162 pag. et 52 fig. Frs. 30.—.

Das aus Vorlesungen des Verf. an der Sorbonne hervorgegangene Buch enthält eine umfassende Darstellung der Kinematik des Punktes und des starren Körpers, deren Inhalt durch die folgenden Kapitelüberschriften näher gekennzeichnet wird: I. Kinematik des Punktes. (17 S.) — II. Kinematik des starren Körpers. Allgemeines. Untersuchung der Geschwindigkeiten und Beschleunigungen. (30 S.) — III. Zusammensetzung von Bewegungen. Anwendungen. (20 S.) — IV. Anwendungen der Zusammensetzung von Bewegungen (Fortsetzung): Methode des bewegten Dreiecks. (13 S.) — V—VII. Genauere Untersuchung der Bewegung eines starren Körpers: V. Bewegung einer ebenen Figur. (56 S.) — VI. Bewegung eines starren Körpers um einen festen Punkt. (6 S.) — VII. Allgemeinste Bewegung eines starren Körpers. (19 S.) Prager.

Turner, J. S.: The spherical analogue of central forces. Math. Gaz. **20**, 327—330 (1936).

Bilimovitch, A.: Sur les équations intrinsèques du roulement d'un corps solide sur une surface fixe. (Athènes, 2.—9. IX. 1934.) Actes Congr. Interbalkan. Math. 139—141 (1935).

Nikolai, E. L.: Das d'Alembertsche Prinzip und die Trägheitskräfte. Trans. Lenin-grad Industr. Inst., Sect.: Phys. a. Math. Nr **6**, 3—10 u. deutsch. Zusammenfassung 11 (1936) [Russisch].

Eine kurze historische Studie über den prinzipiellen mechanischen Inhalt des d'Alembertschen Prinzips. Der Verf. wendet sich mit Recht gegen die vielfache unklare Verknüpfung des Prinzips mit den sogenannten „Trägheitskräften“, die nicht seinem klaren historischen Inhalt entspricht, aber in der späteren Literatur, insbesondere einigen bekannten technischen Lehrbüchern, in Erscheinung getreten ist.

F. Noether (Tomsch).

Kampen, E. R. van, and Aurel Wintner: On the canonical transformations of Hamiltonian systems. Amer. J. Math. **58**, 851—863 (1936).

The authors approach the theory of canonical transformations of the Hamiltonian equations of motion of a dynamical problem, by regarding the coordinates and momenta of the system as coordinates in a phase-space of $2n$ dimensions, and studying directly the point-transformations of this phase-space into another phase-space. The method is therefore symmetric in the coordinates and momenta, and extends, to the case of a general canonical transformation, Wintner's algebraic treatment of the case of linear conservative canonical transformations (this Zbl. **9**, 379). It is shown that the point-transformation in phase-space is canonical if, and only if, its Jacobian matrix determines a linear substitution under which the invariant bilinear form of the complex group is relative-invariant, and that the multiplier is independent both of the position in the phase-space and of the time. Whittaker (Edinburgh).

Wintner, A.: On solutions of zero energy in certain dynamical problems. Quart. J. Math., Oxford Ser. **7**, 214—218 (1936).

The authors obtains, for a large class of dynamical problems including the problem

of three or more bodies, a new invariant relation which exists when the constant of energy vanishes. Thence he deduces the theorem (announced without proof many years ago by Dziobek) that if in the problem of three bodies the constants of energy and angular momentum are zero, then the problem can be reduced to a system of the third order.

Whittaker (Edinburgh).

Marković, Željko: Sur la dynamique des systèmes conservatifs et la topologie. Bull. int. Acad. Yougoslave Sci. Beaux-Arts **29/30**, 43—58 (1936).

Largely exposition concerning the extensive results of Hadamard, Morse, Koebe, Hopf, Rinow and others, on the behavior of geodesics on two-dimensional manifolds, and the significance of these results with respect to dynamical systems of two degrees of freedom. The author seems to be of the opinion that the methods of Koebe which prove that the elements on periodic geodesics are everywhere dense among the totality of elements and that there exist transitive (quasi-ergodic) geodesics, properties which hold on a large class of surfaces of negative curvature, carry over to the general case. So far this has only been proved under some restrictive assumption such as the uniform instability of Morse (this Zbl. **8**, 374). The proof of the extension of these results to the general case would be an important step forward. Hedlund.

Kryloff, Nicolas, et Nicolas Bogoliouboff: Sur les propriétés ergodiques de l'équation de Smoluchovsky. Bull. Soc. Math. France **64**, 49—56 (1936).

Man betrachte ein dynamisches System mit zusammenhängendem, metrischem und kompaktem Phasenraume Ω . In Ω sei ein additives Mengenmaß m definiert, positiv für alle offenen Mengen. Das dynamische System soll nicht kausal sein, sondern durch Übergangswahrscheinlichkeiten definiert werden. Es sei $\varphi(P, Q, t) dm_Q$ die Wahrscheinlichkeit dafür, daß das anfänglich in P befindliche System nach Ablauf der Zeit t in dm_Q landet. φ wird für $t > 0$ als stetig angenommen. Jedenfalls ist

$$\int_{\Omega} \varphi(P, Q, t) dm_Q = 1, \quad \varphi \geq 0,$$

und es besteht bekanntlich die Smoluchowskische Gleichung

$$\varphi(P, Q, t+s) = \int_{\Omega} \varphi(P, R, t) \varphi(R, Q, s) dm_R.$$

Die Verff. finden bezüglich des Verhaltens von φ nach langer Zeit t folgende Ergebnisse:

1. Es existiert

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \varphi(P, Q, t) = \varphi(P, Q)$$

mit gleichmäßiger Konvergenz. 2. Es gibt immer eine endliche Anzahl sich gegenseitig ausschließender „ergodischer“ Mengen E_n ; $n = 1, \dots, a$. Wenn das System in einem E_n startet, so ist die Wahrscheinlichkeit des Verlassens von E_n in jedem Zeitpunkt gleich Null. Und wenn das System beliebig startet, strebt die Wahrscheinlichkeit, in $\sum E_n$ hineinzugelangen, für $t \rightarrow \infty$ nach Eins. Ferner: Wenn das System in E_n startet, $P \subset E_n$, so ist die Grenzwahrscheinlichkeit $\varphi(P, Q)$ unabhängig vom Startpunkt P . 3. Die notwendige und hinreichende Bedingung, daß ganz Ω eine einzige ergodische Mannigfaltigkeit darstellt, ist, daß die Gleichung

$$\varrho(P) = \int_{\Omega} \varphi(Q, P, t) \varrho(Q) dm_Q$$

(für alle t) eine nichtnegative, nur in einer Menge vom m -Maße Null verschwindende Lösung $\varrho(P)$ besitzt. Dies trifft z. B. bei symmetrischen Übergangswahrscheinlichkeiten zu.

E. Hopf (Leipzig).

Hedlund, Gustav A.: Two-dimensional manifolds and transitivity. Ann. of Math., II. s. **37**, 534—542 (1936).

Es ist bekannt, daß es auf geschlossenen zweiseitigen Flächen negativer Gaußscher Krümmung transitive (quasi-ergodische) geodätische Linien gibt (M. Morse). Die Voraussetzung der negativen Krümmung hat zur Folge, daß alle geodätischen Linien gleichmäßig unstabil sind. Unter der letzteren weiteren Voraussetzung gibt es

ebenfalls stets transitive geodätische Linien (M. Morse). Verf. beweist dies etwas einfacher und unter etwas weiteren Voraussetzungen als bei Morse. Ref. bemerkt jedoch, daß die auf Grund der Unstabilitätsvoraussetzung bewiesenen Sätze sehr an Wichtigkeit gewinnen würden, wenn sie durch ein Kriterium ergänzt würden, das, über den Fall negativer Krümmung hinaus, die Unstabilität direkt aus den Eigenschaften der Fläche erkennen läßt.

E. Hopf (Leipzig).

Martin, Monroe H.: Ergodic curves. Amer. J. Math. 58, 727—734 (1936).

Let E be a bounded plane point set and let $L(\varepsilon)$, $\varepsilon \geq 0$, be the greatest lower bound of the lengths of those continuous rectifiable curves which approximate each point of E within distance ε . The principal results of this paper are that there exists a continuous rectifiable curve whose length is $L(\varepsilon)$, that $L(\varepsilon)$ is a monotone non-increasing function of ε and that $L(\varepsilon)$ is continuous on the right. Errera (this Zbl. 7, 129, 227) has studied this problem but with restrictions on the set E . *Hedlund*.

Rein, Natalie: Note on a result of M. H. Martin concerning a particular mass ratio in the restricted problem of three bodies. Amer. J. Math. 58, 735—736 (1936).

Die Verf. zeigt, daß der Beweis von Theorem 3 der im Titel erwähnten Arbeit (dies. Zbl. 1, 73) einen Rechenfehler enthält, der die Existenz der a. a. O. mit μ^* bezeichneten Konstante illusorisch macht.

Wintner (Baltimore).

Buchanan, H. E.: Note on a paper by J. F. Thomson. Amer. Math. Monthly 43, 465—467 (1936).

Die sich an die im Titel erwähnte Arbeit (dies. Zbl. 12, 422) anschließenden Bemerkungen betreffen einerseits die Bedingungen für eine gleichschenklige Lösung und andererseits die exakte Berechnung einer Säkulargleichung.

Wintner (Baltimore).

Mendes, M.: Recherches sur le problème des n corps à masses variables. Ann. Fac. Sci. Univ. Toulouse, III. s. 27, 1—169 (1935).

Die Bewegung zweier Körper veränderlicher Masse, welche sich nach dem Newtonschen Gesetze anziehen, ist der Gegenstand vieler Untersuchungen von Levi-Civita, Armellini u. a. gewesen. Ihre Untersuchungen betreffen die Bahnkurve eines der Körper in bezug auf den anderen unter speziellen Annahmen über die Variationen der Massen. Die Untersuchungen von Stepanoff und Mineur betreffen unter anderen Gesichtspunkten ebenfalls den Fall zweier Körper. — Der Verf. behandelt hier das allgemeine Problem der n Körper veränderlicher Masse. Die Abhandlung ist in drei Abschnitte geteilt: Im ersten Abschnitt wird eine untere Grenze des Konvergenzradius der Reihen gesucht, nach welchem man die Koordinaten und die Geschwindigkeit in der Umgebung eines Zeitpunktes t_0 entwickeln kann, in dem die Entfernungen der Körper nicht Null sind. Daraus ergeben sich interessante Vergleiche mit dem gewöhnlichen n -Körper-Problem. Wir erwähnen eine Verallgemeinerung des Poincaréschen Satzes über die Entwickelbarkeit der Lösungen einer Differentialgleichung, welche von einem Parameter abhängt, der seinerseits Funktion der unabhängigen Variablen ist. Einige Bemerkungen behandeln die Energiegleichung im Falle, daß alle Massen zunehmend oder abnehmend sind. Anwendung der Methode der Variation der Konstanten auf den Fall variabler Masse führt, wenn man von der Lösung des n -Körper-Problems mit fester Masse ausgeht, zu einer Verallgemeinerung eines Satzes von Stepanoff. Die obigen Untersuchungen werden unter der Annahme weitergeführt, daß die Bewegung durch die dynamische Gleichung von Levi-Civita geregelt ist: Ableitung des Impulses gleich Kraft. — Im zweiten Abschnitt behandelt der Verf. speziell den Fall, in welchem die Massen in der Form (1) $m_i = \mu_i \psi(t)$ ausdrückbar sind, wo μ_i konstant ist. Es bestehen dann der Schwerpunktsatz und die Flächenintegrale. Um die Bedingungen dafür zu suchen, daß die Energiegleichung ein Integral liefert, wendet der Verf. die Variablentransformation

$$\frac{d\tau}{dt} = \psi^2, \quad \frac{x_i}{\xi_i} = \frac{y_i}{\eta_i} = \frac{z_i}{\zeta_i} = \frac{1}{\psi}$$

an. Die Differentialgleichungen werden dann

$$\ddot{\xi}_i = \frac{\partial U^*}{\partial \xi_i} + \mu_i F(t) \xi_i,$$

wo

$$U^* = f \sum \frac{\mu_i \mu_j}{\varrho_{ij}}, \quad F = -\frac{1}{\psi^3} \frac{d^2}{dt^2} \frac{1}{\psi}.$$

Es ergibt sich ein erstes Integral, wenn die Funktion $\psi(t)$ von der Gestalt (2) $\psi = (At^2 + Bt + C)^{-1/2}$ ist, wo A, B, C Konstanten sind. — Es folgt das Studium einiger Fälle, in denen man auf Probleme mit festen Massen zurückgeführt wird, und die Behandlung von Bewegungen, bei denen die Entfernungen der Körper konstante Verhältnisse behalten. Die Ordnung des Differentialsystems, von welchem die Untersuchung der Entfernungen dreier Körper abhängt, ist im allgemeinen gleich Neun; sie reduziert sich aber um eine Einheit, wenn die Massen nach dem Gesetz (1) variieren und wenn $\psi(t)$ durch (2) gegeben ist. Es folgen noch die Behandlungen der Zwei- und Dreikörperprobleme und der Stöße, wenn die Massen nach dem Gesetz (1) variieren. — Der dritte Abschnitt ist den Anwendungen der erlangten Resultate gewidmet, speziell dem Studium der „evoluzione dell'orbita“ eines Teilchens im Felde einer „Cefeide“. Im Falle, daß die logarithmische Ableitung der Zentralmasse eine periodische Funktion der Zeit ist, werden die Variationen der großen Halbachse und der Exzentrizität untersucht.

G. Lampariello (Rom).

Racine, C.: On the motion of a particle of varying mass. Math. Student 4, 58 bis 64 (1936).

The author accepts the Newtonian equation of motion $m \frac{d^2 x}{dt^2} = X$ for a particle of constant mass m , and deduces the equation $\frac{d}{dt} \left(m \frac{dx}{dt} \right) = X$ for a particle of variable mass m on the assumption that its motion may be regarded as the limit of a motion in which the mass remains constant during short intervals and changes abruptly at the end of each interval, a change of velocity taking place simultaneously so that momentum is conserved.

J. L. Synge (Toronto).

Narasinga Rao, A.: Observations on the preceding paper. Math. Student 4, 65 bis 67 (1936).

It is pointed out that in the preceding paper Racine obtains the equation of motion for a particle of variable mass ($mdv + vdm = X dt$) by dividing the range into intervals in which alternately (1) $mdv - X dt = 0$, $dm = 0$, and (2) $mdv + vdm = 0$, $dt = 0$, hold. It is proposed in the present paper to reach the required result by means of intervals in which alternately (1) and (3) $vdm - X dt = 0$, $dv = 0$, hold. Synge.

Donder, Th. de, et Y. Dupont: Théorie nouvelle de la dynamique des systèmes continus. Bull. Acad. Roy. Belg., V. s. 22, 907—911 (1936).

In space-time with metric $ds^2 = g_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta$ the authors take a potential vector Φ_α , a skew-symmetric tensor $\Psi_{\alpha\beta}$, and a Lagrangian function $\mathcal{L}(\Phi_\alpha, \Psi_{\alpha\beta}; \Phi_{\alpha\cdot\beta}, \Psi_{\alpha\beta\cdot\gamma})$, where $\Phi_{\alpha\cdot\beta}, \Psi_{\alpha\beta\cdot\gamma}$ are covariant derivatives. The dynamics of continuous systems is based on the variational equation $\delta \int \mathcal{L} dx^1 dx^2 dx^3 dx^4 = 0$, which yields

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Phi_\alpha} - \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Phi_{\alpha\cdot\beta}} \right)_{\cdot\beta} = 0, \quad (4)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Psi_{\alpha\beta}} - \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Psi_{\alpha\beta\cdot\gamma}} \right)_{\cdot\gamma} = 0. \quad (5)$$

[The usual summation convention is used in this report, but not in the paper.] The justification for these expressions, which differ from the usual forms by the presence of covariant instead of ordinary derivatives, will be given in a later note by Mlle. Dupont. — \mathcal{L} is assumed to be of the form

$$\mathcal{L} \equiv \mathcal{M} + \mathcal{G}^\alpha \Phi_\alpha + \mathcal{C}^{\alpha\beta} \Psi_{\alpha\beta} + \frac{1}{2} \Psi_{\alpha\beta} (\mathcal{G}^{\alpha\beta} - \mathcal{G}^{\beta\alpha}), \quad (6)$$

where \mathcal{M} is a function of $\Phi_{\alpha\cdot\beta}$ and $\Psi_{\alpha\beta\cdot\gamma}$, and $\mathcal{G}^{\alpha\beta} = \partial \mathcal{M} / \partial \Phi_{\alpha\cdot\beta}$. The four terms in order represent (I) action of deformation, (II) action of external forces, (III) action

of moments of external forces, (IV) an interaction term. The authors claim that (6) substituted in (4) yields the equations

$$\mathcal{G}^\alpha = \mathcal{G}^{\alpha\beta}{}_{,\beta}. \quad (9)$$

[It is not clear to the ref. why the last term of (6) does not contribute.] For a material medium the authors put

$$\mathcal{G}^{\alpha\beta} = \mathcal{T}^{\alpha\beta} + \pi u^\alpha u^\beta,$$

where $\mathcal{T}^{\alpha\beta}$ is the elastic tensor [stress tensor? Ref.], π material density and $u^\alpha = dx^\alpha/ds$. It is not assumed that $\mathcal{T}^{\alpha\beta}$ is symmetric, and no equation of conservation is assumed. Then (9) give

$$\mathcal{G}^\alpha = \mathcal{T}^{\alpha\beta}{}_{,\beta} + u^\alpha (\pi u^\beta)_{,\beta} + \pi \delta u^\alpha / \delta s,$$

where $\delta u^\alpha / \delta s$ is the absolute derivative of u^α . The tensor $\mathcal{D}^{\alpha\beta\gamma}$ being defined by

$$\partial \pi / \partial \Psi_{\alpha\beta\gamma} = \mathcal{D}^{\alpha\beta\gamma} + \pi \omega^{\alpha\beta} u^\gamma, \quad \omega^{\alpha\beta} = u^\alpha{}_{,\beta} - u^\beta{}_{,\alpha},$$

(5) yield $\mathcal{G}^{\alpha\beta} = \mathcal{D}^{\alpha\beta\gamma}{}_{,\gamma} + \pi \delta \omega^{\alpha\beta} / \delta s + \omega^{\alpha\beta} (\pi u^\gamma)_{,\gamma} - \frac{1}{2} (\mathcal{T}^{\alpha\beta} - \mathcal{T}^{\beta\alpha})$.

[The factor $\frac{1}{2}$ is omitted in the paper in this formula (25), and also in (18) and (20).] — No physical consequences are deduced, but the authors state their intention of applying the theory to electrodynamics, hydrodynamics and elasticity. *J. L. Synge* (Toronto).

Seth, B. R.: Flexure of beams of polygonal cross-section. *Philos. Mag.*, VII. s. 22, 582—598 (1936).

General results based on the theory of conformal representation are used to obtain the flexure of a beam when the cross-section is either a rectangle or a triangle with angles belonging to one of the four sets (90, 45, 45), (120, 30, 30), (60, 60, 60), (90, 60, 30). — The general solution involves a polynomial $R(\varrho)$ some of whose zeros can be found when the load acts along an axis of symmetry of the cross-section. — The case of the rectangular cross-section is treated with the aid of the Jacobian elliptic functions and the solution is transformed into the usual series. The triangle (120, 30, 30) is treated with the aid of elliptic functions of the Weierstrassian type. (60, 60, 60) and (90, 60, 30) are treated in a similar way. *H. Bateman* (Pasadena).

Finzi, Bruno: Tensori, fili e membrane, verghe e lastre. *Mem. Ist. Lombardo Sci.* 23, 35—82 (1936).

Die Tensorrechnung, einschließlich der Tensorrechnung in einer Riemannschen Mannigfaltigkeit, wird in einer Weise dargelegt, wie sie sich für die Erfassung von gewissen Anwendungen auf dem Gebiet der Elastizitätstheorie, insbesondere der Theorie der Fäden, Membranen, Stäbe und Platten eignet. *Funk* (Prag).

Quantentheorie.

Mariani, Jean: L'intervalle d'univers en mécanique ondulatoire relativiste. *C. R. Acad. Sci., Paris* 203, 1056—1058 (1936).

Spekulative Bemerkungen auf Grund der Heisenbergschen Ungenauigkeitsrelationen. *P. Jordan* (Rostock).

Ionescu, Théodore V.: Sur les propriétés d'un électron qui roule sans glisser et dont le rayon varie raison inverse de la vitesse. *C. R. Acad. Sci., Paris* 203, 537—539 (1936).

Ionescu, Théodore V.: Sur la structure du photon. *C. R. Acad. Sci., Paris* 203, 864—867 (1936).

Aus dem Rahmen heutiger Erkenntnis herausfallende Spekulationen über Elektron und Lichtquant. *P. Jordan* (Rostock).

Jordan, P.: Beiträge zur Neutrinotheorie des Lichtes. I. *Z. Physik* 102, 243—252 (1936).

Die Zerlegung eines Neutrinofeldes in ein Lichtfeld und ein reines Neutrinofeld wird näher untersucht unter Betrachtung einer unitären Transformation, welche die

„Neutrinoladung“ um eine Einheit ändert. In Zusammenhang hiermit wird auf eine mögliche Abänderung der Theorie des β -Zerfalls hingewiesen. *O. Klein* (Stockholm).

Proca, Alexandre: Sur les photons et les particules charge pure. C. R. Acad. Sci., Paris **203**, 709—711 (1936).

In Anschluß an frühere Untersuchungen über eine relativistische Vektorwellengleichung (dies. Zbl. **15**, 44) wird die Ansicht ausgesprochen, daß das Photon als ein aus zwei entgegengesetzt geladenen Teilchen mit Ruhemasse Null zusammengesetztes Teilchen aufzufassen ist. *O. Klein* (Stockholm).

Solomon, Jacques: Sur la diffusion de la lumière par les neutrons. C. R. Acad. Sci., Paris **203**, 926—928 (1936).

Einige Bemerkungen über die Möglichkeit einer Streuung von Licht durch ein Neutron, dadurch ermöglicht, daß sich das Neutron vorübergehend bzw. „virtuell“ in ein Proton, ein Elektron und ein Neutrino zerlegen kann. Diese Streuung, die zuverlässig zu berechnen angesichts der ungeklärten Fragen der β -Strahl-Theorie noch nicht möglich ist, sollte immerhin nach Verf. wesentlich größer sein als die Rayleigh-Streuung von Protonen und könnte zur Deutung von Anomalien in der Streuung von γ -Strahlen heranzuziehen sein. *P. Jordan* (Rostock).

Welker, H.: Allgemeine Koordinaten und Bedingungsgleichungen in der Wellenmechanik. Math. Ann. **113**, 304—319 (1936).

Gewisse Unbestimmtheiten in der Quantenmechanik eines Systems mit Nebenbedingungen werden durch die Forderung behoben, daß die Wellengleichung nur von der inneren Beschaffenheit des Systems abhängen darf und nicht von der Weise, wie dasselbe durch Grenzübergang aus einem System mit freien Teilchen erhalten wird. *O. Klein* (Stockholm).

Madhava Rao, B. S.: Semi-vectors in Born's field theory. Proc. Indian Acad. Sci., Sect. A **4**, 436—451 (1936).

Es ergeben sich nach Born-Infeld vier verschiedene Formulierungsmöglichkeiten für die Feldgleichungen der nichtlinearen Elektrodynamik, indem man unter den 4 Vektoren \mathfrak{E} , \mathfrak{D} , \mathfrak{H} , \mathfrak{B} einen elektrischen und einen magnetischen als „Koordinatengrößen“ und die beiden anderen als konjugierte „Impulsgrößen“ betrachtet. Demgemäß bekommt man als Wirkungsfunktion je nachdem die Lagrangefunktion $L(\mathfrak{E}, \mathfrak{B})$ oder die Hamiltonfunktion $H(\mathfrak{D}, \mathfrak{H})$ oder eine gewisse Funktion $U(\mathfrak{D}, \mathfrak{B})$ bzw. $V(\mathfrak{E}, \mathfrak{H})$. Im Gegensatz zu L und H sind U und V keine Invarianten, und die relativistische Invarianz der Beziehungen

$$\mathfrak{E} = \frac{\partial U}{\partial \mathfrak{D}}, \quad \mathfrak{H} = \frac{\partial U}{\partial \mathfrak{B}} \quad (1) \quad \text{bzw.} \quad \mathfrak{D} = -\frac{\partial V}{\partial \mathfrak{E}}, \quad \mathfrak{B} = -\frac{\partial V}{\partial \mathfrak{H}} \quad (2)$$

ist deshalb nicht mit den gewöhnlichen Mitteln der Tensorrechnung nachzuweisen. Der Verf. zeigt, daß jedoch die Einstein-Mayerschen Untersuchungen über „Halbvektoren“ die Hilfsmittel zum Nachweis der Invarianz von (1) und (2) bieten. *Jordan*.

Pollard, W. G.: On the Fermi theory of beta decay. Philos. Mag., VII. s. **22**, 904—920 (1936).

Berechnung der Zerfallswahrscheinlichkeit und der Geschwindigkeitsverteilung der Elektronen beim β -Zerfall auf Grund der Fermischen Theorie mit Hilfe von Annahmen über die Wellenfunktionen der Teilchen, welche dem Ref. recht willkürlich erscheinen. *R. de L. Kronig* (Groningen).

Casimir, H. B. G.: On the magnetic interaction in the deuteron. Physica **3**, 936 bis 938 (1936).

Unter Annahme einer reinen Majoranakraft zwischen Proton und Neutron wird gezeigt, daß im Deuteron der magnetischen Spinwechselwirkung zufolge der spinlose Zustand energetisch um 10^5 e.V. tiefer liegen muß als der Zustand mit Spin $= \hbar$. Dies wird als Argument gegen den Majoranaschen Kraftansatz betrachtet. *O. Klein*.

Stueckelberg, E. C. G.: Invariante Störungstheorie des Elektron-Neutrino-Teilchens unter dem Einfluß von elektromagnetischem Feld und Kernkraftfeld. (Feldtheorie der Materie. II.) *Helv. physica Acta* **9**, 533—554 (1936).

In Anschluß an eine frühere Arbeit des Verf. (dies. Zbl. **14**, 183) wird die von ihm entwickelte invariante Störungstheorie (dies. Zbl. **10**, 381) auf die Kerntheorie angewandt und als Beispiel die Rekombination eines Elektrons der K-Schale mit dem Kern unter Aussendung von γ - und Neutrinostrahlung behandelt. *O. Klein.*

Lopukhin, E.: Sur certain conditions pour les raies radioactifs. *Ž. eksper. teoret. Fis.* **6**, 731—736 (1936) [Russisch].

À l'aide des modèles recents du noyau atomique, il est démontré que les séries des éléments radioactifs présentent trois phases consécutives de désintégration, chaque phase ayant pour résultat une perte de quatre particules. Outre l'existence de ces phases quelques autres conditions formelles sont établies pour déterminer le genre de la désintégration α ou β . *Autoreferat.*

Ornstein, L. S.: On the scattering of neutrons in matter. II. *Akad. Wetensch. Amsterdam, Proc.* **39**, 904—905 (1936).

Die Rechnungen einer früheren Notiz (dies. Zbl. **15**, 136) werden erweitert auf den Fall, daß das Neutron beim Stoß eingefangen werden kann. *Casimir.*

Hönl, H.: Über das magnetische Moment des Protons. *Naturwiss.* **24**, 637—638 (1936).

Der Verf. sucht als Verallgemeinerung der Diracschen Wellengleichung eine Differentialgleichung zweiter Ordnung für eine achtkomponentige Wellenfunktion aufzustellen derart, daß Zustände des Protons und Zustände des Elektrons nebeneinander als Zustände eines und desselben „geladenen Teilchens“ aufgefaßt werden. Als einfachste Möglichkeit ergibt sich eine Gleichung

$$\{\Omega^2 - (\Gamma + \gamma)(\Omega - i\varrho\vec{\Phi}) + \Gamma\gamma - 2i\varrho(\vec{\Phi}, \text{Grad}) - \Phi^2 + i\lambda\varrho S\}\psi = 0$$

mit

$$\Omega = \sum_1^4 \alpha'_k \frac{\partial}{\partial x_k}; \quad S = \frac{\pi e}{hc} \sum_{k,l} \alpha'_k \alpha'_l F_{kl};$$

$$\vec{\Phi}, \vec{\Phi} = \text{Viererpotential, } F_{kl} = \text{Feldstärken;}$$

$$\Gamma = \frac{2\pi Mc}{h}, \quad \gamma = \frac{2\pi mc}{h}, \quad \lambda = \frac{M+m}{M-m}$$

(M, m sind die Massen von Proton und Elektron),

$$\alpha'_k = \begin{pmatrix} \alpha_k & 0 \\ 0 & \alpha_k \end{pmatrix}, \quad \varrho = \begin{pmatrix} \bar{1} & 0 \\ 0 & -\bar{1} \end{pmatrix}, \quad \alpha_k = \text{Diramatrizen, } \bar{1} = \text{Einheitsmatrix 4. Grades.}$$

Für das Elektron ergibt sich bis auf Korrekturen der Größenordnung $\frac{m}{M}$ wieder die gewöhnliche Diracgleichung; für das Proton jedoch ergibt sich ein magnetisches Moment, das gleich 3 Kernmagnetonen ist (gegenüber dem jetzigen experimentellen Wert $2,85 \pm 0,15$). *P. Jordan (Rostock).*

Meixner, J.: Strahlungsdämpfung und Feinstruktur der Balmerlinien des Wasserstoffs. *Ann. Physik, V. F.* **27**, 389—404 (1936).

Verf. untersucht, inwiefern die Strahlungsdämpfung und die Wechselwirkung zwischen zwei angeregten Atomen das Feinstrukturbild der Balmerlinien des Wasserstoffs beeinflussen können. Es ergibt sich, daß keine Verschiebungen von beobachtbarer Größenordnung auftreten. *Casimir (Leiden).*

Derenzini, Tullio: Sul calcolo del fattore atomico di ioni positivi. *Nuovo Cimento*, N. s. **13**, 341—348 (1936).

Fournier, Georges: Sur une théorie géométrique de la matière. *C. R. Acad. Sci., Paris* **203**, 1138—1140 (1936).

Struktur, Energieniveaus und Stabilität der Atomkerne werden durch Kombina-

tionen von Oktaedern und Tetraedern zu veranschaulichen versucht, indem die beiden regulären Körper ihres Volumenverhältnisses 4:1 wegen als Wirkungssphären von α -Teilchen bzw. Neutronen angesehen werden. *W. Nowacki (Bern).*

Brandt, W. H.: Quartet states in diatomic molecules intermediate between cases *a* and *b*. *Physic. Rev., II. s. 50, 778—780 (1936).*

Genäherte Berechnung der Energien der Rotationszustände für Quartett-Elektronenterme zweiatomiger Molekeln, die Übergänge zwischen den Fällen *a* und *b* darstellen. *F. Hund (Leipzig).*

Wigner, E., and J. Bardeen: Theory of the work functions of monovalent metals. *Physic. Rev., II. s. 48, 84—87 (1935).*

Die Austrittsarbeit läßt sich durch eine Formel darstellen, die außer der atomaren Ionisierungsspannung und der Sublimationswärme noch die kinetische Energie des Elektronengases (Fermi-Energie) sowie die Wechselwirkung der Elektronen enthält, soweit diese nicht durch den Einfluß einer homogenen Ladungsverteilung berücksichtigt ist. Die letzten beiden Größen werden so berechnet, als ob sich die Elektronen in einem feldfreien Raum bewegten. Nur für Li wird ein Wert für die Fermi-Energie benutzt, der mit Hilfe von numerischen Rechnungen erhalten wurde. Das Resultat stimmt gut mit den experimentellen Werten überein. Da bei dieser Rechnung die sich an einer Oberfläche notwendig bildende Doppelschicht vernachlässigt worden ist, wird geschlossen, daß diese für einwertige Metalle nicht sehr groß ist. *R. Peierls.*

Bardeen, John: Theory of the work function. II. The surface double layer. *Physic. Rev., II. s. 48, 653—663 (1936).*

Um einen Überblick über den Einfluß der Doppelschicht auf die Austrittsarbeit zu bekommen, wird das folgende Modell behandelt: Die Ionen des Metalls werden kontinuierlich verschmiert, und die Oberfläche des Metalls wird durch eine Ebene ersetzt, an der die positive Ladung unstetig aufhört. Die Elektronen werden in der Fockschen Näherung behandelt, jedoch kann die Focksche Gleichung wegen mathematischer Komplikationen nicht streng gelöst werden. Statt dessen werden für ein vereinfachtes System von Wellenfunktionen (nämlich die in einem Potentialkasten ohne Wechselwirkung) die Fockschen Austauschintegrale berechnet, und es wird so gerechnet, als ob das Verhältnis dieser Integrale zur Wellenfunktion unabhängig von der Wellenfunktion wäre. Dann wird das Problem mathematisch den Hartreegleichungen äquivalent und kann auf die übliche Weise gelöst werden. Auf diese Weise erhält man für eine Elektronendichte, die der Dichte freier Elektronen im Na entspricht, eine Doppelschicht von 1 Volt und eine Austrittsarbeit von 2 Volt. Wenn sowohl in der Wellengleichung wie in der Austrittsarbeit der Tatsache Rechnung getragen wird, daß die Elektronen sich gegenseitig beeinflussen (Bildkraft), so erhält man eine Doppelschicht von 0,4 Volt und eine Austrittsarbeit von 2,35 Volt. Die Korrektur in der Doppelschicht, die von der atomaren Struktur der Oberfläche herrührt, wird ohne nähere Begründung für die 110-Ebene auf 0,25 Volt geschätzt, so daß man den Einfluß der Doppelschicht bei Na auf 0,15 Volt schätzen würde. *R. Peierls.*

Rutgers, A. J.: Bemerkung zur Anwendung der Thermodynamik auf die Supraleitung. *Physica 3, 999—1005 (1936).*

Es wird darauf aufmerksam gemacht, daß die Abwesenheit einer Umwandlungswärme beim Übergang vom supraleitenden zum Normalzustand, die (nach Behauptung des Verf.) bei früheren thermodynamischen Behandlungen vorausgesetzt worden war, bewiesen werden kann. Der Beweis wird unter der Annahme durchgeführt, daß bei Annäherung an den Sprungpunkt die zweite Ableitung des kritischen Magnetfelds nach der Temperatur endlich bleibt. Ferner werden die Gleichungen für den speziellen Fall diskutiert, daß die Differenz der spezifischen Wärmen von normalem und supraleitendem Zustand ein Polynom dritten Grades in der Temperatur ist. *R. Peierls.*

Blackman, M.: On the absorption of polar crystals in the infra-red. *Philos. Trans. Roy. Soc. London A* 236, 103—131 (1936).

Das elastische Spektrum eines zweidimensionalen Gitters wird unter der Annahme berechnet, daß Zentralkräfte zwischen je zwei unmittelbar oder diagonal benachbarten Atomen wirksam sind. Die Rechnung wird für den Fall eines zweidimensionalen „Kochsalzgitters“ durchgeführt, dessen Atome abwechselnd verschiedene Maße haben. Insbesondere wird die Aufspaltung in den optischen und den akustischen Zweig studiert, und in jedem der vier Zweige des Spektrums werden die extremen Frequenzen berechnet. Die Resultate über Lage und Größe dieser extremen Frequenzen werden qualitativ auf den dreidimensionalen Fall verallgemeinert. Sie werden mit den beobachteten Maxima der Ultratransmission verglichen. (Obwohl im Dreidimensionalen diese extremen Frequenzen nicht zu Maxima, sondern zu Minima im Spektrum der Eigenschwingungen gehören. D. Ref.) Der Zusammenhang zwischen Absorptions- und Reflexionskoeffizient wird qualitativ diskutiert. *R. Peierls* (Cambridge).

Gorter, C. J., and R. de L. Kronig: On the theory of absorption and dispersion in paramagnetic and dielectric media. *Physica* 3, 1009—1020 (1936).

Es wird eine allgemeine Theorie der Adsorption und Dispersion in dielektrischen oder paramagnetischen Medien gegeben unter den folgenden allgemeinen Annahmen: A. Die Aufspaltung der untersten Terme der elementaren Systeme (Atome, Moleküle, Spins) hängt noch ab von dem Zustand der Nachbarsysteme (dies bedeutet eine Auseinanderziehung des Termsystems). B. Es finden spontane Übergänge zwischen diesen Termen statt, z. B. auf Grund der thermischen Bewegung (dies bedeutet eine Verbreiterung der Terme). Auf Grund dieser Annahmen werden die experimentellen Resultate über die Absorption der Metallalaune, die zur Herstellung tiefer Temperaturen durch adiabatische Entmagnetisierung verwandt werden, diskutiert und Schlüsse über die Effekte A und B gezogen, die mit den Erfahrungen bei der magnetischen Kühlung in Einklang sind. *Nordheim* (Lafayette-Indiana).

Geophysik, Meteorologie, Geodäsie.

Prey, A.: Über die Polfluchtkraft. *Gerlands Beitr. Geophys.* 48, 349—387 (1936).

Um die Polfluchtkraft exakter erfassen zu können, werden für eine trapezförmige Scholle von kontinentalem Ausmaße, die von Meridianen, Parallelkreisen und Niveauflächen begrenzt ist, die wirkenden Kräfte: Anziehung, Fliehkraft und Druck getrennt berechnet. Vorausgesetzt wird, daß die Erde ein geschichtetes Rotationsellipsoid ist, wobei für die Dichte ϑ und die Abplattung κ der inneren Niveauflächen die ersten drei Glieder einer Potenzreihenentwicklung angesetzt werden. Die Scholle ist homogen von der Dichte 2,7 und schwimmt im Sima mit der Oberflächendichte 3,0. Da die Polfluchtkraft von 3. Ordnung ist, läßt sich zeigen, daß das Quadrat der Abplattung vernachlässigt werden darf. Verf. nimmt an, daß die Scholle unter dem Einfluß aller wirkenden Kräfte eine kleine Verschiebung und Drehung erfährt, wobei er sich wegen der vorausgesetzten Rotationssymmetrie auf die x - und z -Komponenten beschränken kann. Die Drehung erfolgt um eine zur y -Achse parallele Drehachse durch den Schwerpunkt der Scholle. Die Anziehungskomponenten werden ausgehend von den Formeln für das homogene Ellipsoid in Funktion der 6 Koeffizienten der Potenzreihen für ϑ und κ und der Dicke u der Scholle entwickelt und der Einfluß des verdrängten Simas nachträglich in Abzug gebracht. Um den Schwierigkeiten zu entgehen, die die Einführung des Metazentrums, d. i. des Schwerpunkts der verdrängten Untergrundmasse, für das Drehmoment mit sich bringt, und um das Kräftespiel besser zu durchblicken, werden Größe und Richtung des Druckes für die vier Seitenflächen und die Bodenfläche getrennt berechnet. In den Endformeln für die x - und z -Komponenten der gesamten Kräfte heben sich die großen Glieder wegen des hydrostatischen Gleichgewichtes der Erde und des Archimedischen Prinzips weg. Im numerischen Beispiele erstreckt sich

die Scholle von 25° bis 65° geographischer Breite und von -15° bis $+15^{\circ}$ in Länge und hat eine Dicke von 50 km. Es resultiert eine Gesamtneigung von $1,1''$, entsprechend einer Hebung von 12 m am Nordrand der Scholle, und eine Verschiebung von nur 20 m gegen Norden. Dieses der üblichen Vorstellung widersprechende Verhalten wird im Anschluß an R. Schwinn's durchsichtige Herleitung der Polfluchtkraft aus der Tatsache erklärt, daß der Schwerpunkt der schwimmenden Scholle unter der Oberfläche liegt, so daß er infolge der Divergenz der Niveaulächen nach Süden hin nur bei einer nördlichen Schollenbewegung in ein tieferes Niveau sinken kann. Aus dieser äußerst kleinen Verschiebung schließt der Verf., daß die kleinen Gleichgewichtsstörungen überhaupt unausgeglichen bleiben werden und von einer Polfluchtkraft, die die Kontinente über Tausende von Kilometern zum Äquator drängt, nicht gesprochen werden kann.

K. Ledersteger (Wien).

Ansel, E. A.: Schwereanomalien in Beziehung zu der Form der Störung des Schichtenverbandes in der Erdkruste. Beitr. angew. Geophys. 6, 141—167 (1936).

Für die kontinentale Erdkruste wird eine dreifache Schichtung angenommen (abgesehen von den Sedimenten), mit Sprungflächen in den Tiefen 10 und 30 km und den Dichten 2,7, 3,0 und 3,3. Für einfache, vorgegebene Profile von Störungen dieser normalen Massenanordnung werden die Schwerestörungen berechnet und mit beobachteten Schwereanomalien verglichen.

J. Bartels (Eberswalde).

Milewski, B.: Sur la chute libre des corps au-dessous de la surface de la terre. Wia-dom. mat. 42, 129—143 (1937).

La force d'attraction au-dessus de la surface de la Terre étant proportionnelle à $1/r^2$ et celle au-dessous de la surface à r , les équations qui donnent la chute libre sont différentes dans les deux cas. L'auteur étudie particulièrement le dernier cas. La trajectoire dans un système dont les axes sont fixes par rapport aux étoiles fixes est une ellipse dont le centre se trouve au centre de la Terre (dans le premier cas la trajectoire est une ellipse dont un foyer se trouve au centre de la Terre). Par rapport à la Terre en rotation la trajectoire est déterminée à l'aide de deux surfaces, qui la contiennent et dont l'une est un hyperboloïde de révolution à une nappe (pour le second cas la surface correspondante est un hyperboloïde à deux nappes). L'auteur détermine la déviation du corps en chute vers l'est et vers le sud et retrouve après quelques simplifications, qu'il fait subir les formules, celles qui ont été obtenues déjà par Gauss dans l'hypothèse que la force de la pesanteur est constante.

H. I. E. Beth.

Mader, Karl: Gradient und Krümmungsgröße des Segments eines unendlichen horizontalen Kreiszylinders. Gerlands Beitr. Geophys. 48, 417—427 (1936).

Es werden die für die Auswertung von Drehwaagenmessungen notwendigen zweiten Ableitungen des Gravitationspotentials berechnet für Zylindersegmente, die dadurch entstehen, daß ein unendlich langer, horizontal liegender Kreiszylinder von einer Horizontalebene geschnitten wird. Liegt die horizontale Schnittebene oberhalb des Mittelpunktes der Zylinder-Kreisfläche, so liefern die in geschlossener Form angegebenen Formeln Gradient und Krümmungsgröße eines horizontalen Zylindersegmentes, das einer Aufwölbung (Hebung) des Grundgebirges entspricht; liegt die horizontale Schnittebene unterhalb des Mittelpunktes der Zylinder-Kreisfläche, so erhält man Gradient und Krümmungsgröße einer muldenförmigen Einsenkung des Grundgebirges. Die Formeln für Gradient und Krümmungsgröße der Zylindersegmente sind in der üblichen Weise graphisch dargestellt und mit den bereits früher vom Verf. angegebenen entsprechenden Feldgrößen für einen horizontal liegenden unendlich langen Keil (vgl. dies. Zbl. 10, 236) verglichen.

Schlomka (Hannover).

Sloutchanovsky, A.: On the magnetizing of a halfinfinite cylinder in a homogenous field parallel to its axis. Trans. Centr. Geophys. Observ. H. 5, 3—22 u. engl. Zusammenfassung 22 (1936) [Russisch].

En étudiant l'anomalie magnétique engendrée par un demi-cylindre circulaire de perméabilité magnétique comme plongé dans un champ magnétique homogène parallèle

à son axe (le demi-cylindre s'étend à l'infini d'un côté seulement et il est limité par une section normale à l'axe de l'autre côté), l'auteur met en évidence qu'au point de vue pratique l'équation intégrale du problème vérifiée par le potentiel du champ induit se laisse résoudre par approximations et qu'en calculant les trois premières on obtient les valeurs suffisamment approchées du potentiel et des composantes du champ étudié. Le travail est important pour les géophysiciens appliquant la méthode magnétique de prospection géophysique.

E. Kogbetliantz (Téhéran).

Langer, R. E.: On the determination of earth conductivity from observed surface potentials. Bull. Amer. Math. Soc. 42, 747—754 (1936).

Bei der Ermittlung des scheinbaren spezifischen Widerstandes mittels der Wennerschen Vierpunktmethode verfährt man in der Praxis so, daß man für vorgegebene Untergrundverhältnisse die zugehörige Potentialverteilung an der Erdoberfläche berechnet und dann die gemessenen Werte mit den berechneten vergleicht. Es handelt sich also um eine Ausdeutung durch Probieren. Eine direkte Lösungsmethode ist erst kürzlich von L. B. Slichter [The interpretation of the resistivity prospecting method for horizontal structures. Physics 4, 307 (1933); dies. Zbl. 7, 334] und R. E. Langer [An inverse problem in differential equations. Bull. Amer. Math. Soc. 39, 814 (1933); dies. Zbl. 8, 46] gegeben worden. Damals wurde allerdings vorausgesetzt, daß die Leitfähigkeit eine stetige Funktion der Tiefe ist. In der vorliegenden Arbeit zeigt nun der Autor die Lösung des Problems für den Fall, in dem entweder die Leitfähigkeit oder deren Ableitungen eine Unstetigkeit mit der Tiefe besitzen.

J. N. Hummel (Berlin).

● **Blackett, P. M. S.:** Cosmic rays. Oxford: Clarendon press 1936. 25 pag., 2 plat. a. 6 fig. 2/-.

Nach einer kurzen Einleitung und Beschreibung der Beobachtungsverfahren werden die drei Gesichtspunkte beschrieben, von denen aus die kosmische Strahlung untersucht wird; der geophysikalische ist an der Intensitätsverteilung in Abhängigkeit von geographischer Länge, Breite und Höhe sowie Richtungs- und Zeitabhängigkeit interessiert, der astronomische beschäftigt sich mit dem Entstehungsort und der physikalische mit der Natur und den Wirkungen der Strahlung. Der Verf. neigt zu der Annahme, daß die Wahrscheinlichkeit für Bildung von sekundären Schauern sich in anomaler Weise ändert für einfallende Elektronen mit einer Energie von $2-3 \cdot 10^9$ Elektronvolt. Die Existenz ein und derselben kritischen Breite am Erdboden und in der Stratosphäre, über die hinaus die Intensität nicht mehr wächst, könnte dadurch erklärt werden. Aber andere Erklärungsmöglichkeiten sind nicht ausgeschlossen.

B. Haurwitz (Toronto).

Sartorelli, Pier Luigi: Sulla distribuzione dell'intensità dei raggi cosmici. Atti Ist. Veneto Sci. etc. 95, 251—263 (1936).

Størmer, Carl: Résultats des calculs numériques des trajectoires de corpuscules électriques dans le champ d'un aimant élémentaire. V. Faisceaux de trajectoires avec asymptotes parallèles à l'axe magnétique et normales à cet axe. Skr. norske Vid.-Akad., Oslo 1936, 1—91 (Nr 6).

● **Philipps, H.:** Die Störungen des zonalen atmosphärischen Grundzustandes durch stratosphärische Druckwellen. (Deutsch. Reich. Reichsamt f. Wetterdienst. Wiss. Abh. Bd. 2, Nr. 3.) Berlin: Julius Springer 1936. 52 S. u. 8 Abb. RM. 6.—.

Der Verf. stellt sich auf den Standpunkt, daß das Wetter der Troposphäre durch Vorgänge in der Stratosphäre gesteuert wird. Das Feld der meteorologischen Elemente (Wind, Druck und Temperatur) wird aus einem Grundzustand und kleinen Störungen aufgebaut, von denen nur die linearen Glieder berücksichtigt werden. Der stationäre Grundzustand (die allgemeine atmosphärische Zirkulation) wird ohne Berücksichtigung von Reibungskräften und mit Vernachlässigung der Verteilung von Land und Meer

über einer homogen gedachten Erdoberfläche berechnet, indem ein rein meridionaler Druckgradient vorausgesetzt wird. Der Grundzustand ist dann zonal (Wind entlang den Parallelkreisen). Das Temperaturfeld wird sowohl in der Troposphäre als auch in der Stratosphäre durch lineare Funktionen der geographischen Breite und der Höhe dargestellt. Dann kann man aus der Gasgleichung und den Bewegungsgleichungen Geschwindigkeit, Druck und Dichte bestimmen, während die Kontinuitätsgleichung von selbst erfüllt ist. Die Abhängigkeit des Temperaturgradienten von der Neigung der Tropopause (Grenzfläche zwischen Tropo- und Stratosphäre) wird durch eine empirische Regel berücksichtigt. Die so berechnete allgemeine atmosphärische Zirkulation stimmt in großen Zügen mit der Wirklichkeit überein. — Bei der Berechnung der Störungen werden im Gegensatz zu den Anschauungen der Norwegischen Schule alle vertikalen Beschleunigungen gegenüber der Schwerebeschleunigung vernachlässigt. Ferner läßt der Verf. die Windrichtung in der freien Atmosphäre mit der Richtung der Isobaren zusammenfallen. Diese Annahme bedingt eine Einschränkung für die horizontalen Beschleunigungen. Nach weiteren Vereinfachungen erhält der Verf. schließlich für die Druckstörung eine partielle Differentialgleichung erster Ordnung mit der Zeit und der geographischen Breite als unabhängigen Veränderlichen. Die Lösung dieser Differentialgleichung wird durch Vorgabe einer Wellenbewegung längs der Tropopause festgelegt im Gegensatz zu der Auffassung der Norwegischen Schule, die Wellenbildungen an den inneren troposphärischen Grenzflächen (Polarfront, Inter-tropikfront) als primär ansieht. Über die bisherigen Ansätze der mitteleuropäischen Meteorologen (G. Stüve, A. Defant) hinaus wird ein allmählicher Aufbau und entsprechender Abbau der Druckwelle angenommen, die sich längs der Tropopause von West nach Ost bewegen soll und durch ein einfaches Aggregat trigonometrischer Funktionen dargestellt wird. Besonders werden weiterhin die Störungen der Troposphäre durch die Wellenbewegung der Tropopause studiert. Bemerkenswert ist, daß troposphärische Störungen noch vorhanden sein können, wenn die Druckwelle an der Tropopause bereits abgebaut ist. Überhaupt fügen sich alle Teilergebnisse zu einem befriedigenden Bild der Zyklonentstehung durch stratosphärische Druckwellen zusammen, wobei allerdings die Frage nach der Möglichkeit der Welle an der Tropopause noch offen bleibt.

W. Tollmien (Göttingen).

Schiller: Beiträge zur Berechnung und Beobachtung von Dreiecksnetzen. Allg. Vermessgs-Nachr. 48, 493—501 u. 510—519 (1936).

Verf. teilt eine Reihe von Vorschlägen mit, die dazu dienen sollen, Richtungs- und Winkelbeobachtungen in Dreiecksnetzen zweckmäßig anzulegen und zu berechnen. Während es allgemein üblich ist, für Richtungsbeobachtungen mit von der Einheit abweichenden Gewichten die Orientierungsunbekannten aus den Normalgleichungen zu eliminieren, zeigt Verf., daß die auf diese Weise reduzierten Normalgleichungen unmittelbar gewonnen werden können, und zwar bei den äußeren Richtungen durch Einführung bestimmter Rechengewichte, bei den inneren Richtungen durch Reduktion der Fehlergleichungen. Die Gewichte von Richtungsbeobachtungen werden eingehender diskutiert, insbesondere die Berechnung von Gewichten exzentrisch gemessener Richtungsmessungen aus Diagrammen und die Berücksichtigung von Längenmessungen bei trigonometrischen Punktbestimmungen.

Schmehl (Berlin).

Kasper, H.: Unterbrochene Streckenmessung. Allg. Vermessgs-Nachr. 48, 660 bis 661 (1936).

Lips: Zur unterbrochenen Streckenmessung. Allg. Vermessgs-Nachr. 48, 661 bis 662 (1936).

Werkmeister, P.: Berechnung der Höhe eines Dreiecks aus dessen Seiten. Allg. Vermessgs-Nachr. 49, 15—19 (1937).